MATERIAL DE APRENDIZAJE A DISTANCIA

Profa. Shanthall González

AGOSTO DE 2022

12° E

Fecha de entrega: 16 de septiembre de 2022

Indicaciones Generales:

- Cada taller debe entregarse en hojas 8 ½ "x 11". Pueden ser blancas o de rayas.
- Coloque encabezado para cada taller que incluya su nombre y grupo.

  Ejemplo de encabezado

  Taller Sumativo #1

  Nombre: Fulano de tal Grupo: 12° Z

  Valor: 50 puntos
- Puede imprimir o copiar los talleres para su entrega.
- Sea claro y ordenado al solucionar los ejercicios solicitados.
- Procure ser puntual en la entrega de estos para que su evaluación no se vea afectada.
- Cada taller tiene puntos por la solución de los ejercicios y por puntualidad y orden en su desarrollo y entrega.
- Entréguelos todos juntos de ser posible engrapados.
- Estaré recogiendo los mismos en la fecha indicada (16 de septiembre) en horario de 9:00 a.m. – 11:00 a.m. Si por algún motivo no puede entregar en la fecha indicada o en el horario indicado debe entregar en la administración del colegio, para su posterior evaluación (con tardanza).

Al finalizar esta cápsula serás capaz de:

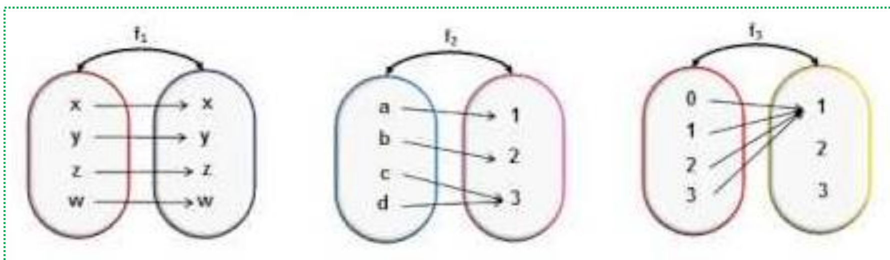
- Identificar los diferentes tipos de funciones y sus gráficas**.**
- Determinar el **conjunto dominio y codominio** de las diferentes funciones.

Tema #1: Funciones Reales

Las funciones son un tipo especial de correspondencia o relación entre los elementos de dos conjuntos, en la que cada elemento de un conjunto **A** le corresponde uno y sólo un elemento de otro conjunto **B.**

La definición formal es:

"*Una función de $A \to B$ es una relación en la cual a cada elemento del dominio A le corresponde uno y sólo un elemento del codomino B formándose así un conjunto de pares ordenados, en el que no hay dos pares que tengan igual la primera componente".*



Dominio y Codominio o Rango

Si consideramos el conjunto de todos los pares correspondientes que definen una función; al conjunto formado por todos los primeros elementos de los pares se le llama *dominio* de la función, y el conjunto formado por los segundos elementos de los pares se le llama *codominio* de la función.

$R = \{(2, 4), (3, 6), (4, 8)\}$

Así, el dominio y rango o codominio son:

Dominio $= \{2, 3, 4\}$; Rango $= \{4, 6, 8\}$

Propiedades de las funciones:

1) Cualquier elemento del codominio puede corresponder a más de un elemento del dominio.
2) Algunos de los elemento del codominio pueden no corresponder a ninguno de los elementos del dominio.
3) El dominio y el codominio deben ser, el conjunto de los números reales R o un subconjunto del mismo R.
4) Un elemento del dominio nunca puede ser preimagen de más de una imagen.
5) Todo elemento del dominio debe ser preimagen.

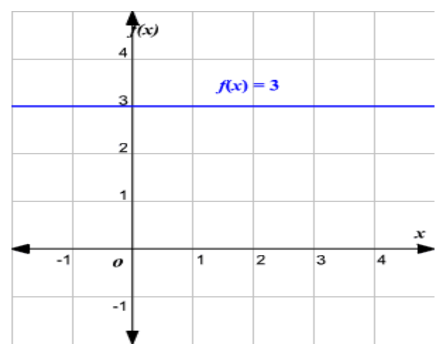
Es importante utilizar la notación y nomenclatura correcta al momento de hablar y trabajar con funciones; aquí algunas nociones:

- Variable independiente: variable utilizada como sustituto de los valores del Dominio.
- Variable dependiente: variable empleada como sustituto de los valores del Codominio.
- Los elementos del dominio reciben el nombre de preimagen.
- Los elementos del codominio se conocen como imagen.
- Si existe una relación en la cual algún elemento del dominio, no se asocia con algún elemento del rango, dicha relación no es una función.

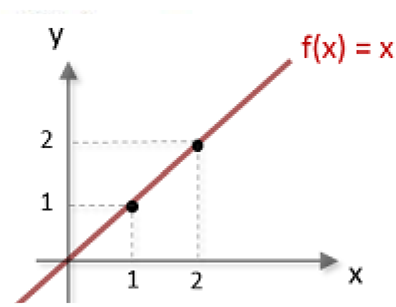
Clasificación de las Funciones

Las funciones se clasifican en dos tipos generales: *Funciones Algebraicas* y *Funciones Trascendentes.* Se distinguen por la naturaleza de los términos y operaciones involucrados.

- **Funciones algebraicas** En las funciones algebraicas las operaciones que hay que efectuar con la variable independiente son: la adición, sustracción, multiplicación, división, potenciación y radicación.

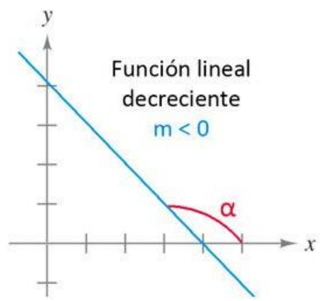


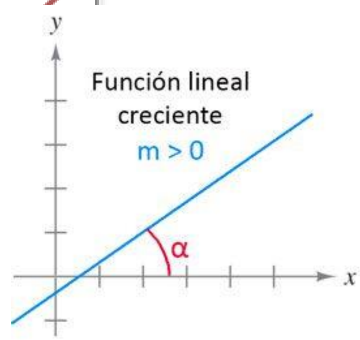
- *Función Constante:* Una **función constante *f*** es una función tal que la variable dependiente ***y*** toma el mismo valor ***a*** para cualquier elemento del dominio (variable independiente *x*) f(x) = a. El dominio de la función constante es el conjunto de los números reales R y su codominio es un conjunto unitario que está formado por el valor correspondiente de la variable dependiente.



- *Función Idéntica:* Una **función idéntica o identidad** es una función tal que la imagen de cualquier elemento es éste mismo: *f(x) = x*. Su dominio y codominio son exactamente iguales y están dados por el conjunto de los números reales R. Su gráfica es una línea recta que pasa por el origen y biseca al primer y tercer cuadrante del plano cartesiano.

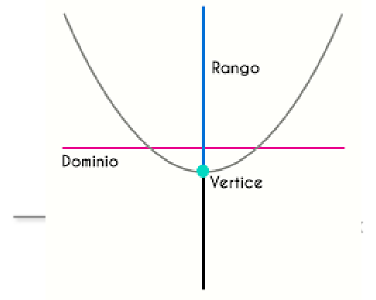
- *Función Lineal:* Una **función lineal** es una función polinómica de grado 1 que pasa por el origen de coordenadas, es decir, por el punto (0,0). Son funciones **rectas** de la forma: $f_{(x)} = mx$. La ***m*** es la **pendiente** de la recta. La pendiente es la inclinación con respecto al eje X. Si *m* es positiva (*m* > 0), entonces la función es creciente, si la *m* es



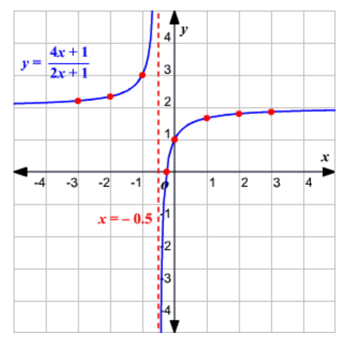


negativa ($m < 0$), la función es decreciente. Si la m es positiva, según aumente la x la y también irá aumentando (función creciente). En cambio, si m es negativa, cuando aumenta la x la y disminuirá (función decreciente). Su **dominio** son todos los números reales R, cuyo **codominio** son también todos los números reales R.

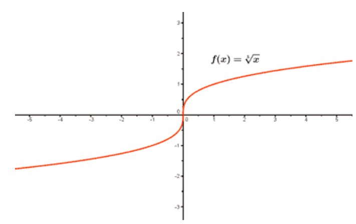
- *Función Cuadrática:* Una **función cuadrática** (o función de segundo grado) es una función polinómica de **grado 2**, es decir, el mayor exponente del polinomio es x elevado a 2 (x^2). Su forma estándar es: $f(x) = ax^2 + bx + c$; donde $a \neq 0$. El dominio de la función cuadrática es el conjunto de los números reales R y su codominio depende de la función y su gráfica.

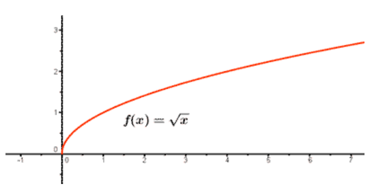


- *Función Racional:* Una **función racional** $f(x)$ es el cociente irreducible de dos polinomios (para ello, no deben tener las mismas raíces). La palabra racional hace referencia a que esta función es una razón. $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$; la variable x debe estar en el denominador. El **dominio** de una **función racional** son todos los números reales (R) excepto los valores de la variable x que anulan el denominador ($Q(x)) = 0$). El **codominio** se calcula buscando los valores que puede tomar la variable dependiente después de excluir los que anulan el denominador en el *dominio.*

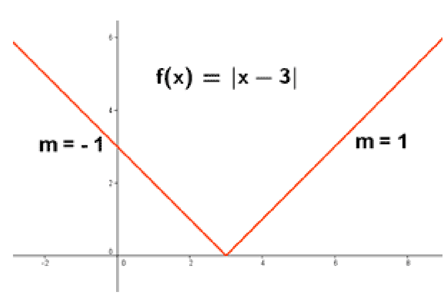


- *Función Irracional:* Una **función irracional** o **función raíz** es la que la variable dependiente ***y*** se obtiene de una raíz que alberga en el radicando a la variable independiente ***x***; *así* $y = \sqrt[n]{f(x)}$. El dominio de una función irracional de índice impar es R. El dominio de una función irracional de índice par está formado por todos los valores que hacen que el radicando sea mayor o igual que cero ($f(x) \geq 0$).



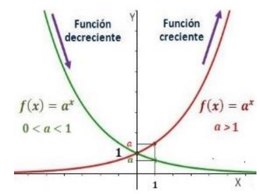


- *Función Valor Absoluto:* La ecuación de la función de valor absoluto es: $y = |x|$ **o** $f(x) = |x|$. Siempre representa distancias por lo tanto siempre será positiva o nula, por lo tanto su gráfica nunca se encontrará por debajo del eje ***x***, a lo sumo lo tocará y siempre se muestra con forma de **V.** Su **dominio** está dado por el conjunto de los números reales R y el **codominio** por los reales positivos y el cero inclusive $[0, \infty^+)$.



- **Funciones trascendentes** La variable independiente figura como exponente, o como índice de la raíz, o se halla afectada del signo logaritmo o de cualquiera de los signos que emplea la trigonometría.

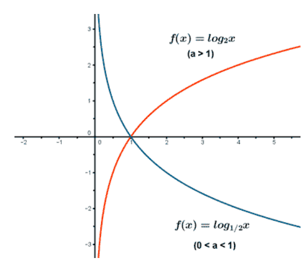
- *Función Exponencial:* Una **función exponencial** es aquella que la variable independiente *x* aparece en el **exponente** y tiene de base una constante ***a***. Su expresión es: $f(x) = a^x$ siendo *a* un real positivo, $a > 0$, y diferente de 1, $a \neq 1$. Cuando $0 < a < 1$, entonces la **función exponencial** es una **función decreciente** y cuando $a > 1$, es una **función creciente**. Su **dominio** son todos los números reales R y su **codominio** son los números reales positivos R^+.



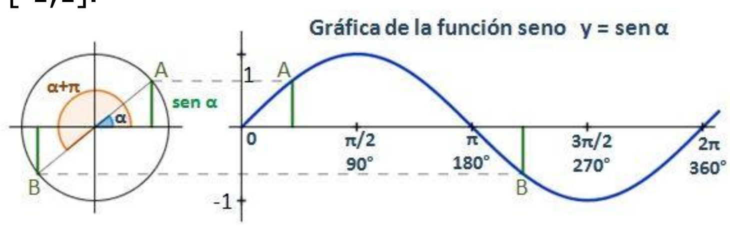
Todas las funciones exponenciales **exp (*x*)** cumplen las siguientes propiedades:

- $\exp(x + y) = \exp(x) \cdot \exp(y)$
- $\exp(x - y) = \dfrac{\exp(x)}{\exp(y)}$
- $\exp(-x) = \dfrac{1}{\exp(x)}$

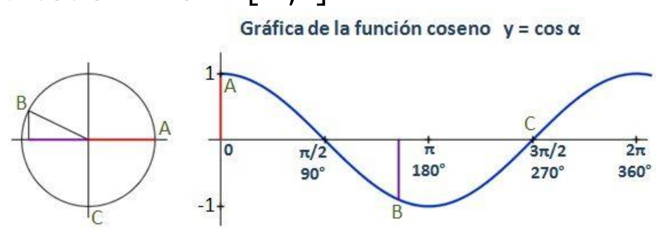
- *Función Logarítmica:* Una **función logarítmica** está formada por un **logaritmo** de base *a*, y es de la forma: $f(x) = \log_a(x)$, siendo *a* un real positivo, $a > 0$, y diferente de 1, $a \neq 1$. La **función logarítmica** es la inversa de la función exponencial. Su **dominio** es el conjunto de los números reales positivos y el cero inclusive $[0, \infty^+)$; su **codominio** son todos los números reales R.



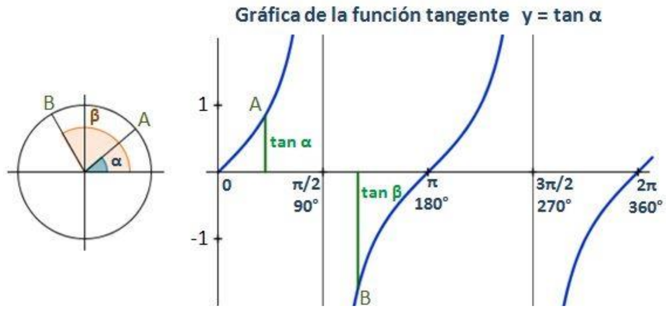
- *Funciones Trigonométricas*: las **funciones trigonométricas** *f* son aquellas que están asociadas a una razón trigonométrica.
  - *Función seno:* La función del **seno** es **periódica** de período 360º (2π radianes), por lo que esta sección de la gráfica se repetirá en los diferentes períodos. Su **dominio** es R y su **codominio** es [-1,1].



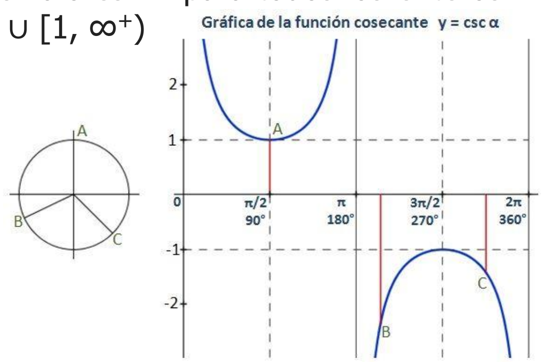
  - *Función coseno:* La función del co**seno** es **periódica** de período 360º (2π radianes), por lo que esta sección de la gráfica se repetirá en los diferentes períodos. Su **dominio** es R y su **codominio** es [-1,1].



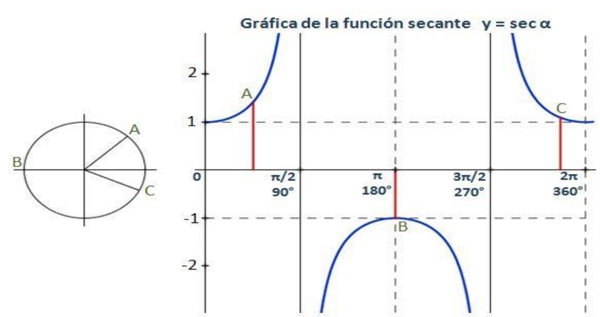
✸ *Función tangente:* La función de la **tangente** es **periódica** de período 180º (π radianes). El **dominio** de la función *tangente* es todos los números reales *excepto* los valores donde el cos(*x*) es igual a 0, esto es, los valores $\frac{\pi}{2} + \pi \cdot n$ para todos los enteros *n*. El **codominio** de la función tangente son todos los números reales R.



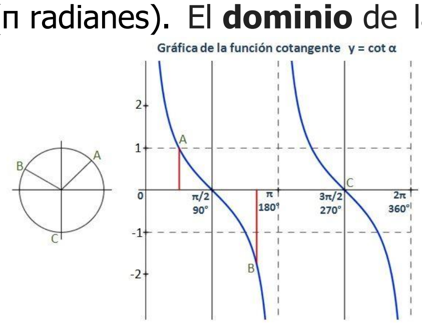
✸ *Función cosecante:* la función de la **cosecante** es **periódica** de período 360º (2π radianes). El **dominio** de la **función** es todos los números reales R excepto los valores donde el seno x es igual a 0, esto es, los valores πn para todos los enteros n. El codominio o rango de la **función** es (-∞, −1] ∪ [1, ∞+)



✸ *Función secante:* La función de la **secante** es **periódica** de período 360º (2π radianes). El **dominio** de la **función** es todos los números reales R excepto los valores donde el coseno x es igual a 0, esto es, los valores $\frac{\pi}{2}$ + *a* · π), siendo *a* un número entero. El codominio o rango de la **función** es (-∞, −1] ∪ [1, ∞+).



✸ Función cotangente: la función **cotangente** es **periódica** de período 180º (π radianes). El **dominio** de la **función** es todos los números reales R excepto los valores donde el seno x es igual a 0, esto es, los valores πn para todos los enteros n. El rango o **codominio** de la **función** es todos los números reales R.



OPERACIONES CON FUNCIONES

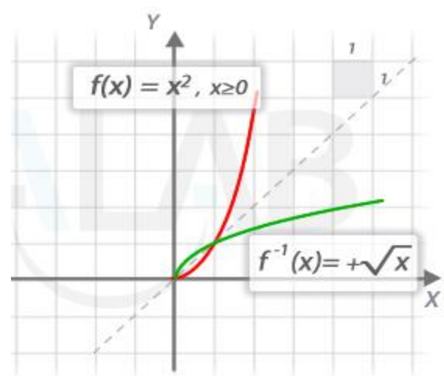
Objetivo Específico: Resuelve operaciones con funciones y encuentra la compuesta de funciones.
Contenido: Función inversa. Compuesta de Funciones.
Vídeo de apoyo: https://www.youtube.com/watch?v=TxRpKrQJsdw
https://www.youtube.com/watch?v=fLiwtU-8KN4

El estudio de las funciones reales constituye el armazón de toda la matemática real y, consecuentemente, de toda la ciencia y la tecnología modernas.
La definición moderna del concepto de función se debe al matemático francés Agustin-Louis Cauchy (1789 – 1857). Cauchy inició la sistematización de la teoría de grupos, imprescindible en el Álgebra moderna, y fue uno de los precursores del rigorismo en Matemática.

Función Inversa

Una función $\mathbf{f^{-1}}$ se llama inversa de otra **f** si ocurre que $f^{-1}(f_{(x)}) = f(f^{-1}{}_{(x)}) = x$, para cada número real **x**.

Por ejemplo la función $f^{-1}{}_{(x)} = \sqrt{x}$, es inversa de $f_{(x)} = x^2$, pues para cada **x** mayor o igual que cero (0) ocurre que: $f^{-1}(f_{(x)}) = f^{-1}(x^2) = \sqrt{x^2} = x$ y $f(f^{-1}{}_{(x)}) = f(\sqrt{x})^2 = x$



Una función y su inversa tienen sus gráficas simétricas respecto a la bisectriz del primer y cuarto cuadrante.

Dada ésta característica, para obtener la expresión analítica de f^{-1} intercambiamos **x** e **y** en $y = f(x)$. Despejamos ***y*** obteniendo así la función $\boldsymbol{f^{-1}}$.

$y = f(x) \rightarrow x = f(y) \rightarrow f^{-1}(x) = f^{-1}(f_{(y)}) \rightarrow f^{-1}(x) = y$

Ejemplos:

1) Obtener la función inversa de f(x) = 3x – 7

*Intercambiamos **y** por **x** y obtenemos:*

$$y = 3x - 7 \Rightarrow x = 3y - 7$$
$$y = \frac{x + 7}{3}$$
$$\therefore f^{-1}(x) = \frac{x+7}{3}$$

2) Determinar la función inversa de $f_{(x)} = 5 + \frac{3x^2}{2}$

Escribimos $y = 5 + \frac{3x^2}{2}$, *intercambiamos **y** por **x*** $x = 5 + \frac{3y^2}{2}$, *procedemos a despejar la nueva **y**.*

$$x = 5 + \frac{3y^2}{2}$$
$$2x = 10 + 3y^2$$
$$2x - 10 = 3y^2$$
$$y^2 = \frac{2x - 10}{3}$$
$$y = \sqrt{\frac{2x - 10}{3}}$$
$$\therefore f^{-1}_{(x)} = \sqrt{\frac{2x - 10}{3}}$$

Composición de funciones

Componer dos funciones es hacer actuar una de ellas sobre el resultado de la otra.

$$x \xrightarrow{f} f_{(x)} \xrightarrow{g} g_{(f_{(x)})} \ o \ bienx \xrightarrow{g} g_{(x)} \xrightarrow{f} f_{(g_{(x)})}$$

Se les denomina, por $(g \circ f)_{(x)}$ y $(f \circ g)_{(x)}$ respectivamente y se leen "f compuesta con g" y "g compuesta con f". Es decir $(g \circ f)_{(x)} = g(f_{(x)})$ y $(f \circ g)_{(x)} = f(g_{(x)})$.

Ejemplos:

1) Dadas las funciones $f_{(x)} = 3x^2 + 1$ y $g_{(x)} = sen\, x$;

$f \circ g = f_{(g(x))} = f_{(sen\, x)}$
$= 3sen^2 x + 1$

$g \circ f = g(f_{(x)}) = g(3x^2 + 1)$
$= sen(3x^2 + 1)$

2) Si $f_{(x)} = x + 2$ y $g_{(x)} = \frac{1}{x-2}$, hallar $(f \circ g)_{(x)}$ e indica el dominio de la función resultante.
$(f \circ g)_{(x)} = f\left(g_{(x)}\right)$

$= f\left(\frac{1}{x-2}\right) = \frac{1}{x-2} + 2$ se sustituye $\frac{1}{x-2}$, en el lugar de la x de f(x)

$= \frac{1}{x-2} + \frac{2\,(x-2)}{x-2}$, resolviendo la operación resultante

$= \frac{1+2x-4}{x-2} = \frac{2x-3}{x-2}$

El dominio de la función es $D_{f \circ g} =$ R $- \{2\}$, pues este es el valor que anula el denominador.

3) Con la función $f_{(x)} = \sqrt{x}$ y $g_{(x)} = 3x - 4$, determina $(f \circ g)_{(x)}$ e indica el dominio de la función resultante.
$(f \circ g)_{(x)} = f\left(g_{(x)}\right)$
$= f(3x - 4) = \sqrt{3x - 4}$, reemplazando el valor de la función $g_{(x)}$ en la función *f.*

Para el dominio de la función resultante debemos recordar que para funciones racionales de índice par, las mismas sólo están definidas en R^+ y 0. Por lo tanto tenemos:

$3x - 4 \geq 0$
$3x \geq +4$ es decir $D_{f \circ g} = \left[\frac{4}{3}, \infty\right)$
$x \geq \frac{4}{3}$

Operaciones Fundamentales con Funciones

Objetivo Específico: Resuelve operaciones con funciones y encuentra el dominio de la función resultante.
Contenido: Operaciones fundamentales con funciones.
Vídeos de apoyo: https://www.youtube.com/watch?v=jP1mSfUqpxw
https://www.youtube.com/watch?v=NX5N40f6Dic

Supongamos dos funciones $f_{(x)}$ y $g_{(x)}$ definidas sobre su dominio denominados D_f y D_g respectivamente:

- **La *suma o adición*** de ambas funciones queda definida de forma natural como:
  $(f + g)_{(x)} = f_{(x)} + g_{(x)}$, que es una función totalmente nueva. Y cuyo dominio está dado por $D_{f+g} = D_f \cap D_g$.

Ejemplo:

(1) Dadas las funciones $f_{(x)} = x^2 - 4$ y $g_{(x)} = x+2$, calcula la función $(f + g)_{(x)}$ y determina el dominio de la misma.

Solución:

$(f + g)_{(x)} = f_{(x)} + g_{(x)}$

$= (x^2 - 4) + (x + 2)$

$= x^2 - 4 + x + 2$

$= x^2 + x - 2$

Al ser funciones polinómicas sus dominios eran el conjunto de los números reales (R), por lo tanto la intersección de los mismos da como resultado igualmente el conjunto de los números reales (R). Es decir $D_{f+g} = R$.

(2) Sean $f_{(x)} = \frac{1}{x+1}$ y $g_{(x)} = \frac{1}{x+2}$, determina la función $(f+g)_{(x)}$ y define su dominio.

Solución:

$$(f+g)_{(x)} = f_{(x)} + g_{(x)}$$
$$= \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+2}$$
$$= \frac{(x+2)+(x+1)}{(x+1)(x+2)}$$
$$= \frac{2x+3}{(x+1)(x+2)}$$

El D_f es el conjunto de los números reales exceptuando al -1 y el D_g es el conjunto de todos los números reales exceptuando el -2, por lo tanto el $D_{f+g} = R - \{-2, -1\}$

- ***El producto o multiplicación*** de ambas funciones está dado por:

$(f \cdot g)_{(x)} = f_{(x)} \cdot g_{(x)}$, que resulta también en una función totalmente nueva. Y su dominio está dado por $D_{f\,.\,g} = D_f \cap D_g$.

Ejemplo:

(1) Para las mismas funciones dadas anteriormente $f_{(x)} = x^2 - 4$ y $g_{(x)} = x+2$ encontrar $(f \cdot g)_{(x)}$

Solución:

$(f \cdot g)_{(x)} = f_{(x)} \cdot g_{(x)}$

$= (x^2 - 4)(x + 2)$

$= x^3 + 2x^2 - 4x - 8$

Se repiten las condiciones para los dominios de las funciones, por lo tanto el dominio de la función resultante es el mismo conjunto R.

(2) Siendo las funciones $f_{(x)} = \frac{1}{x-2}$ y $g_{(x)} = \frac{x}{x-3}$, defina la función (f · g)(x) y su dominio correspondiente.

Solución:

$(f \cdot g)_{(x)} = f_{(x)} \cdot g_{(x)}$

$$= \left(\frac{1}{x-2}\right)\left(\frac{x}{x-3}\right) = \frac{x}{(x-2)(x-3)}$$

El D_f es el conjunto de los números reales exceptuando al 2 y el D_g es el conjunto de todos los números reales exceptuando el 3, por lo tanto el $D_{f \cdot g} = R - \{3, 2\}$

*** Propiedades para el producto y la adición de funciones ***

Propiedad	**Suma**	**Producto**
Asociativa	(f+g)+h = f +(g+h)	(f · g)·h = f·(g·h)
Conmutativa	(f + g) = (g + f)	f · g = g · f
Elemento Neutro	Es la función $x \rightarrow 0$ pues $f_{(x)} + 0 = f_{(x)}$	Es la función $x \rightarrow 1$ pues $f_{(x)} \cdot 1 = f_{(x)}$
Elemento Simétrico	Opuesta de f: $(-f)_{(x)} = -f_{(x)}$ pues $f_{(x)} - f_{(x)} = 0$	No existe función inversa
Distributiva de la multiplicación respecto a la suma	f · (g + h) = f · g +f · h	

- ***La sustracción para funciones*** reales queda definida de forma similar a la adición, así sean $f_{(x)}$ y $g_{(x)}$ dos funciones reales. La sustracción está dada por $f_{(x)} - g_{(x)}$.

Ejemplos:

(1) Sean dos funciones definidas por: $f_{(x)} = \frac{3}{x-2}$ y $g_{(x)} = \sqrt{x}$. Determine $(f - g)_{(x)}$

$(f - g)_{(x)} = f_{(x)} - g_{(x)} = \frac{3}{x-2} - \sqrt{x}$

El dominio está dado por la intersección de los dominios de las funciones.

$D_f = R - \{2\}$ y $D_g = [0,\infty) \Rightarrow D_f \cap D_g = [0,2) \cup (2,\infty)$

(2) Para las funciones $f_{(x)} = x^2 - 4$ y $g_{(x)} = x+2$ encontrar $(f - g)_{(x)}$. Y defina el dominio de la función resultante.

$$(f-g)_{(x)} = f_{(x)} - g_{(x)}$$
$$= (x^2 - 4) - (x + 2)$$
$$= x^2 - 4 - x - 2$$
$$(f-g)_{(x)} = x^2 - x - 6$$

El conjunto de los números reales es el dominio de ambas funciones por lo tanto el dominio de la nueva función resultante es igualmente R.

- ***El cociente de funciones;*** dadas dos funciones de variable real, *f* y *g*, y definidas en un mismo intervalo, se llama *función cociente* de f y g a la función definida por $\frac{f}{g}(x) = \frac{f_{(x)}}{g_{(x)}}$ la función cociente solo está definida cuando el divisor (en este caso $g_{(x)}$) es distinto de cero (0). El dominio está dado por:
  $D(f/g)_{(x)} = (D_f \cap D_g)$ donde -$\{x \in R / g_{(x)} \neq 0\}$

Ejemplos:

(1) Sea $f_{(x)} = \frac{3}{x-2}$ $g_{(x)} = \sqrt{x}$ encuentre $\left(f/g\right)_{(x)}$ y su dominio

$$\left(f/g\right)_{(x)} = \frac{f_{(x)}}{g_{(x)}} = \frac{\frac{3}{x-2}}{\sqrt{x}} = \frac{3}{(x-2)\sqrt{x}}$$

$D_{f(x)} = R - \{2\}$ $D_{g(x)} = [0, \infty^{+})$
$D_{(f/g)(x)} = R - \{2, 0\}$

Límites y Continuidad

Objetivo Específico: Verifica la existencia del límite y continuidad de una función.
Contenido: Definición, concepto. Teoremas.
Vídeos de apoyo: https://www.youtube.com/watch?v=nTaiyaoyJhw
https://www.youtube.com/watch?v=kRaL0widcCY

Definición de Límite

* ***Significado intuitivo:*** Decir que $\lim_{x \to c} f_{(x)} = L$, significa que cuando **x** está cerca, pero difiere de **c**, entonces $f_{(x)}$ está cerca de **L**.
c no es un punto arbitrario ni definido para $f_{(x)}$, no es necesario que $f_{(x)}$ este definida en **c.**

* ***Definición formal:*** sean **Ɛ** y δ números positivos arbitrarios considerándolos números positivos pequeños:
Decir que $f_{(x)}$ difiere de **L** en menos de **Ɛ** es decir que $|f_{(x)} - L| < \varepsilon$
$\Rightarrow L - \varepsilon < f_{(x)} < L + \varepsilon$; esto significa que $f_{(x)}$ está en el intervalo $(L - \varepsilon, L + \varepsilon)$

Decir que **x** está suficientemente cerca pero difiere de **c**, es decir que para alguna δ, x pertenece al intervalo $(c - \delta, c + \delta)$ con **c** eliminado de éste, así $0 < |x - c| < \delta$.
$|x - c| < \delta \rightarrow c - \delta < x < c + \delta$
$0 < |x - c| \rightarrow x \neq c$

Podemos decir:

Si existe un número **L**, tal que $f_{(x)}$ esté cerca de **L**, para todos los valores de ***x*** próximos a un número ***a***, se dice que $\boldsymbol{\lim_{x\to a} f_{(x)} = L}$

Teorema principal sobre Límites

Sean *n* un entero positivo, *k* una constante y *f* y *g* funciones que tengan límites en *a.* Entonces:

1) *Límite de una constante:* $sea\ f_{(x)} = c \quad \Rightarrow \forall\ a, \lim_{x\to a} f_{(x)} = c \ \Rightarrow \lim_{x\to a} c = c$

$* \lim_{x\to\frac{1}{2}}(3) = 3 \qquad\qquad * \lim_{x\to 2}(\frac{2}{5}) = \frac{2}{5}$

2) *Límite de la función idéntica*: $sea\ f_{(x)} = x \quad \Rightarrow \forall\ a, \lim_{x\to a} f_{(x)} = a \ \Rightarrow \lim_{x\to a} x = a$

$* \lim_{x\to 4}(x) = 4 \qquad\qquad * \lim_{x\to\frac{2}{3}}(x) = \frac{2}{3}$

3) Límite de una constante por una función: $\lim_{x\to a} k\cdot f_{(x)} = k\left[\lim_{x\to a} f_{(x)}\right]$

$* \lim_{x\to 3} 2x = 2\left[\lim_{x\to 3} x\right] = 2\,[3] = 6$

4) Límite de la suma y resta de funciones: $si\ \lim_{x\to a} f_{(x)} = L \ \ y\ \ \lim_{x\to a} g_{(x)} = M \ \Rightarrow\ \lim_{x\to a}[f_{(x)} + g_{(x)}] = \lim_{x\to a} f_{(x)} + \lim_{x\to a} g_{(x)} = L + M$

$* \lim_{x\to 4} 3x + 2 = \lim_{x\to 4} 3x + \lim_{x\to 4} 2 = 3\left[\lim_{x\to 4} x\right] + 2 = 3\,[4] + 2 = 12 + 2 = 14$

5) *Límite del producto de funciones:* $si\ \lim_{x\to a} f_{(x)} = L \ \ y\ \ \lim_{x\to a} g_{(x)} = M \ \Rightarrow\ \lim_{x\to a}[f_{(x)}\cdot g_{(x)}] = \lim_{x\to a} f_{(x)}\cdot \lim_{x\to a} g_{(x)} = M\cdot L$

$* \lim_{x\to 5}\ (2x)(x) = \left[\lim_{x\to 5} 2x\right]\left[\lim_{x\to 5} x\right] = \left[2\cdot \lim_{x\to 5} x\right]\ [5] = [2\cdot 5][5] = 10\cdot 5 = 50$

6) *Límite del cociente de funciones:* $si\ \lim_{x\to a} f_{(x)} = L \ \ y\ \ \lim_{x\to a} g_{(x)} = M \ \Rightarrow\ \lim_{x\to a}[\frac{f_{(x)}}{g_{(x)}}] = \frac{\lim_{x\to a} f_{(x)}}{\lim_{x\to a} g_{(x)}} = \frac{M}{L}, si\ \lim_{x\to a} g_{(x)} \neq 0$

$$* \lim_{x\to\frac{1}{2}}\left(\frac{2x}{3}\right) = \frac{\lim_{x\to\frac{1}{2}} 2x}{\lim_{x\to\frac{1}{2}} 3} = \frac{2\cdot \lim_{x\to\frac{1}{2}} x}{3} = \frac{2\cdot\frac{1}{2}}{3} = \frac{1}{3}$$

7) *Límite de la potencia de una función:* *si* $\lim_{x\to a} f_{(x)} = L \Rightarrow \lim_{x\to a}\left[f_{(x)}\right]^{n} = \left[\lim_{x\to a} f_{(x)}\right]^{n} = (L)^2$

$$*\lim_{x\to 3}(3x^2+2x) = \lim_{x\to 3} 3x^2 + \lim_{x\to 3} 2x = 3\cdot\left[\lim_{x\to 3} x^2\right] + 2\cdot\left[\lim_{x\to 3} x\right] = 3\left[\lim_{x\to 3} x\right]^2 + 2\,[3]$$
$$= 3\,[3]^2 + 6 = 3(9)+6 = 27+6 = 33$$

8) *Límite de la raíz de una función:* $\lim_{x\to a}\sqrt[n]{f_{(x)}} = \sqrt[n]{\lim_{x\to a} f_{(x)}}$, *siempre que* $\lim_{x\to a} f_{(x)} > 0$ *cuando* n *sea par*

$$*\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x+1}}{x-4} = \frac{\lim_{x\to 3}\sqrt{x+1}}{\lim_{x\to 3}(x-4)} = \frac{\sqrt{\lim_{x\to 3}(x+1)}}{\lim_{x\to 3} x - \lim_{x\to 3} 4} = \frac{\sqrt{\lim_{x\to 3} x + \lim_{x\to 3} 1}}{3-4} = \frac{\sqrt{3+1}}{-1} = \frac{\sqrt{4}}{-1} = \frac{2}{-1} = -2$$

Ejemplos:

a) $\lim_{x\to 1} 3 = 3$

b) $\lim_{x\to -4}(x+3)^2 = \left[\lim_{x\to -4}(x+3)\right]^2 = \left[\lim_{x\to -4} x + \lim_{x\to -4} 3\right]^2 = (-4+3)^2 = (-1)^2 = 1$

c) $\lim_{x\to -1}\frac{x^2+1}{x} = \frac{\lim_{x\to -1}(x^2+1)}{\lim_{x\to -1} x} = \frac{\lim_{x\to -1} x^2 + \lim_{x\to -1} 1}{\lim_{x\to -1} x} = \frac{(-1)^2+1}{-1} = \frac{2}{-1} = -2$

d) $\lim_{x\to 2}(-x^2+x-2) = \lim_{x\to 2}(-x^2) + \lim_{x\to 2} x$ - $\lim_{x\to 2} 2 = -(2)^2+2-2 = -4+2-2 = -4$

e)
$$\lim_{x\to -2}\frac{x^3+8}{x^4-16} = \lim_{x\to -2}\frac{\cancel{(x+2)}(x^2-2x+4)}{\cancel{(x+2)}(x-2)(x^2+4)} = \lim_{x\to -2}\frac{x^2-2x+4}{(x-2)(x^2+4)};$$
$$\Rightarrow \lim_{x\to -2}\frac{x^3+8}{x^4-16} = \frac{(-2)^2-2(-2)+4}{(-2-2)((-2)^2+4)} = \frac{4+4+4}{-4(8)} = -\frac{12}{32};$$

f) $\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x+1}}{x-4} = \frac{\sqrt{\lim_{x\to 3}(x+1)}}{\lim_{x\to 3}(x-4)} = \frac{\sqrt{\lim_{x\to 3} x + \lim_{x\to 3} 1}}{\lim_{x\to 3} x - \lim_{x\to 3} 4} = \frac{\sqrt{3+1}}{3-4} = \frac{2}{-1} = -2$

Taller Sumativo #1
(Teoría de Funciones - Valor 40 puntos)

I – Parte. Verdadero y Falso. Escriba *Verdadero* para los enunciados ciertos y *Falso* para aquellos que sean falsos. *Valor 5pts.*

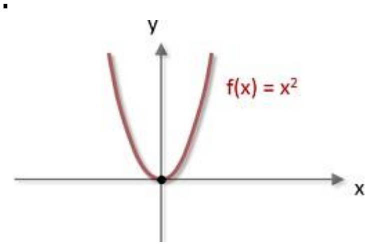
1) En una función a cada elemento del Dominio le corresponde un único elemento del conjunto de llegada...______________.
2) La función seno es una función periódica con periodo de 2Π ....______________.
3) Los elementos del Dominio reciben el nombre de imagen....................______________.
4) Las funciones reales se clasifican en Algebraicas y Trascendentes........______________.
5) Funciones trigonométricas son aquellas asociadas a alguna razón trigonométricas ....______________.

II – Parte. Complete. En los espacios en blanco escriba la respuesta correcta que corresponde a cada enunciado. *Valor 8pts.*

1) Escriba el nombre de dos funciones trigonométricas cuyo codominio estádado por [-∞,-1] U [1, ∞] _________________ y _________________.
2) Variable empleada en las funciones como sustituto de los elementos del codominio_________________.
3) Función para la que la imagen decualquier elemento del dominio es éstemismo elemento _________________.
4) Aquella función algebraica de grado 2 recibe el nombre de ______________.
5) El conjunto de llegada en una función se conoce por los nombres de _________________ y _________________.
6) El dominio de la función Valor Absoluto es_______________________ _.

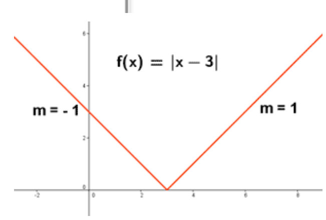
III – Parte. Selección Única. Escoja la letra correspondiente a la respuesta correcta. *Valor 10pts.*

1) La gráfica mostrada a continuación corresponde a la función:



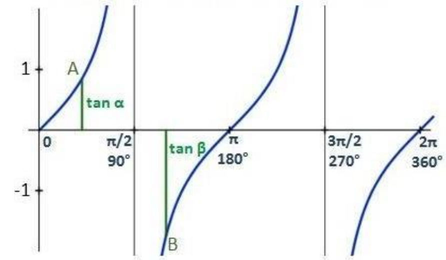
   a) Lineal
   b) Cuadrática
   c) Constante
   d) Identidad

2) Esta gráfica es para la función:



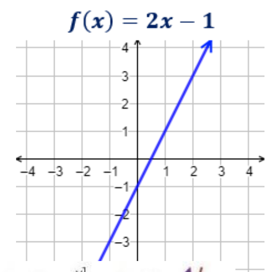
   a) Valor Absoluto
   b) Racional
   c) Irracional
   d) Exponencial

3) Podemos observar la gráfica de la función:



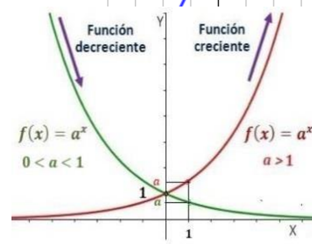
- **a)** Seno
- **b)** Coseno
- **c)** Tangente
- **d)** Cosecante

4) En el gráfico mostrado se aprecia una función:



- **a)** Lineal
- **b)** Cuadrática
- **c)** Constante
- **d)** Identidad

5) Aquí se observa la gráfica para la función:



- **a)** Logarítmica
- **b)** Exponencial
- **c)** Seno
- **d)** Coseno

***IV* – Parte. Pareo.** Escriba el número de la columna B que corresponde a la forma algebraica de cada función de la columna A. *Valor 9pts*

Columna A		Columna B
______ Función Irracional	1)	$f_{(x)} = mx$
______ Función Valor Absoluto	2)	$f(x) = \|x\|$
______ Función Identidad	3)	f(x)= (P(x))/(Q(x))
______ Función Racional	4)	$f(x) = x$
______ Función Exponencial	5)	$f(x) = a^x$
______ Función Lineal	6)	$f_{(x)} = a$
______ Función Logarítmica	7)	$y = \sqrt[n]{f(x)}$
______ Función Constante	8)	$f(x) = ax^2 + bx + c$
______ Función Cuadrática	9)	$f(x) = log_a(x)$

Taller Sumativo #2
(Operaciones con funciones - Valor 60 puntos)

1) **Dadas las funciones $f_{(x)} = 2x - 3$ y $g_{(x)} = x^2 + 6$, determine**
   - **a.** $(f \circ g)_{(x)}$, defina el dominio de la función resultante. *12 puntos*
   - **b.** $(g \circ f)_{(x)}$, defina el dominio de la función resultante. *15 puntos*

2) **Determine la inversa para cada una de las siguientes funciones:**
   - **a.** $f_{(x)} = 2x - 3$ *6 puntos*
   - **b.** $g_{(x)} = 2x^2 + 5$ *9 puntos*
   - **c.** $h_{(x)} = \frac{1}{2x-3}$ *11 puntos*

Taller Sumativo #3
(Operaciones fundamentales con funciones - Valor 50 puntos)

Solucione. Dadas las funciones $f_{(x)} = x + 1$ y $g_{(x)} = \frac{1}{x+1}$ determine:

1) $(f + g)_{(x)}$ **10 pts**

2) $(f \cdot g)_{(x)}$ **10pts**

3) $\left(\frac{f}{g}\right)_{(x)}$ **10pts**

4) $(f - g)_{(x)}$ **10pts**

Encuentre el dominio de las funciones resultantes

Taller Apreciación #1
(Teoremas de Límites- Valor 80 puntos)

I- Encuentra los siguientes límites si existen, aplicando los teoremas sobre límites

1) $\lim_{x\to 5}(3x^2 - 6x + 8)$ (13pts)

2) $\lim_{x\to 4} \sqrt[3]{x+4}$ (7pts)

3) $\lim_{x\to 8} \frac{5x^2-9x+22}{2x^2+7}$ (28 pts)

II- Calculo el límite indicado, dado que $\lim_{x\to a} f_{(x)} = 3$ y $\lim_{x\to a} g_{(x)} = -1$

1) $\lim_{x\to a} \sqrt{f_{(x)}^2 + g_{(x)}^2}$ (11 pts)

2) $\lim_{x\to a} \frac{\boldsymbol{2f_{(x)} - 3\, g_{(x)}}}{\boldsymbol{f_{(x)} + g_{(x)}}}$ (14 pts)