MATERIAL DE APRENDIZAJE A DISTANCIA

Profa. Shanthall González

AGOSTO DE 2022

11° E F G H

Fecha de entrega: 16 de septiembre de 2022

Indicaciones Generales:

- Cada taller debe entregarse en hojas 8 ½ "x 11". Pueden ser blancas o de rayas.
- Coloque encabezado para cada taller que incluya su nombre y grupo.

  Ejemplo de encabezado

  Taller Sumativo #1

  Nombre: Fulano de tal Grupo: 11° Z

  Valor: 50 puntos
- Puede imprimir o copiar los talleres para su entrega.
- Sea claro y ordenado al solucionar los ejercicios solicitados.
- Procure ser puntual en la entrega de estos para que su evaluación no se vea afectada.
- Cada taller tiene puntos por la solución de los ejercicios y por puntualidad y orden en su desarrollo y entrega.
- Entréguelos todos juntos de ser posible engrapados.
- Estaré recogiendo los mismos en la fecha indicada (16 de septiembre) en horario de 9:00 a.m. – 11:00 a.m.
- Si por algún motivo no puede entregar en la fecha indicada o en el horario indicado debe entregar en la administración del colegio, para su posterior evaluación (con tardanza).

Tema#1

Operaciones con Números Complejos. Multiplicación y división de números complejos:

El producto de dos números complejos $a + bi$ y $c + di$ está dado por la expresión:
$(a + bi) + (c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$.

Ejemplo:

$$(5 + 4i)(3 - 2i)$$
$$= [(5)(3) - (4)(-2)] + [(5)(-2) + (4)(3)]i$$
$$= [15 - (-8)] + [-10 + 12]i$$
$$= (15 + 8) + (2)i$$
$$= 23 + 2i$$

El cociente de dos números complejos $a + bi$ y $c + di$, se obtiene multiplicando tanto el numerador y el denominador por el conjugado del denominador.

$$\frac{a + bi}{c + di} = \frac{a + bi}{c + di} \cdot \frac{c - di}{c - di}$$

Ejemplo:

$$\frac{2 + 3i}{1 - 4i}$$
$$= \frac{2 + 3i}{1 - 4i} \cdot \frac{1 + 4i}{1 + 4i}$$
$$= \frac{[(2)(1) - (3)(4)] + [(2)(4) + (3)(1)]i}{[(1)(1) - (-4)(4)] + [(1)(4) + (-4)(1)]i}$$

$$= \frac{[(2)(1) - (3)(4)] + [(2)(4) + (3)(1)]i}{[(1) - (-16)] + [(4) + (-4)]i}$$

$$= \frac{[(2)(1) - (3)(4)] + [(2)(4) + (3)(1)]i}{[(1 + 16)] + [(0)]i}$$
$$= \frac{(2 - 12) + (8 + 3)i}{1 + 16}$$
$$= \frac{-10 + 11i}{17}$$
$$= \frac{-10}{17} + \frac{11}{17}i$$

Taller Sumativo #1
(Valor 110 puntos)

Realice las siguientes operaciones y exprese su respuesta en la forma *a +bi*

1) $(5+4i)(3-i)$ 10puntos
2) $\left(6-\sqrt{-7}\right)\left(5-\sqrt{-7}\right)$ 10puntos
3) $\frac{2+3i}{1-4i}$ 20puntos
4) $(2+2i)\left(4\sqrt{3}-4i\right)$ 10puntos
5) $\frac{2-3i}{1-i}$ 20puntos
6) $\frac{(2-i)(3-i)}{(1+2i)(1+3i)}\ 30\ puntos$

Tema #2
Valor Absoluto y argumento de un número complejo

Definición: el valor absoluto o módulo de un número complejo $a+bi$ es el número real no negativo $r=|a+bi|=\sqrt{a^2+b^2}$.

Definición: el argumento de un número complejo $a+bi$ diferente de cero es el ángulo θ , tal que $0° \leq \theta \leq 360°$.

$$cos\theta=\frac{a}{r} \quad y \quad sen\theta=\frac{b}{r}.$$

Para obtener el argumento de un número complejo $a+bi$, diferente de cero, se puede utilizar la función $tan\theta=\frac{b}{a}$ de donde $\theta=tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)$, además de considerar el cuadrante en el que se encuentra la gráfica.

Ejemplo:

- Hallar el valor absoluto y el argumento de $3+2i$

$|3+2i| \qquad a=3 \qquad b=2$

$r=\sqrt{(3)^2+(2)^2}$ $\qquad \theta=tan^{-1}\left(\frac{2}{3}\right)$

$r=\sqrt{9+4}$ $\qquad \theta=tan^{-1}(0{,}6666666667)$

$r=\sqrt{13}$ **Valor absoluto.** $\qquad \theta=33°41'$ **Argumento**

Este número estará ubicado en el primer cuadrante.

- Hallar el valor absoluto y el argumento de $-4+2i$

$|-4+2i| \quad a=-4 \quad b=2$

$r=\sqrt{(-4)^2+(2)^2}$ | $\theta = tan^{-1}\left(\frac{2}{-4}\right)$

$r=\sqrt{16+4}$ | $\theta = tan^{-1}(-0{,}5)$

$r=\sqrt{20}$ | $\theta_R = -26°33'$

$r=2\sqrt{5}$ **Valor absoluto.** | $\theta = 153.4°$ **Argumento**

Este número estará ubicado en el **segundo cuadrante.**

Taller de Apreciación #1
(Valor 80 puntos)

Determina el valor del valor absoluto y el argumento de los siguientes números complejos, recuerde indicar en que cuadrante se encuentran ubicados los mismos: (12 puntos cada uno)

1) 3 – 4i

2) 0,5 + 1,2i

3) 7 + $\sqrt{15}i$

4) $3-3i$

5) -7i

6) 5

Tema #3
Forma trigonométrica y algebraica de un número complejo

Los números complejos también se pueden representar en términos de su módulo y argumento.

Sea $a+bi$ un número complejo diferente de cero, cuyo módulo es $r=|a+bi|$ y su argumento es θ. El ángulo θ llamado amplitud del número complejo, se escoge generalmente, como el ángulo positivo menor, cuyo $tan\theta = \frac{b}{a}$.

De acuerdo a la definición del argumento de un número complejo, se tiene que:

$$\boxed{cos\theta = \frac{a}{r} \quad y \quad sen\theta = \frac{b}{r}}$$

al momento de despejar en cada ecuación $a \ y \ b$ tenemos:

$$\boxed{rcos\theta = a \quad y \ rsen\theta = b.}$$

Luego por sustitución, $a + bi = rcos\theta + (rsen\theta)i$
Al factorizar r, $a + bi = r(cos\theta + isen\theta)$

La expresión $\boldsymbol{r(cos\theta + isen\theta)}$ se denomina forma trigonométrica o polar, y suele abreviarse muy a menudo como $\boldsymbol{rcis\theta}$, quedando

$$\boldsymbol{r(cos\theta + isen\theta) = rcis\theta}.$$

La forma algebraica o rectangular de un número complejo a partir de su forma trigonométrica o polar, se encuentra reemplazando el módulo y argumento de este, en las siguientes ecuaciones: $\boldsymbol{a = rcos\theta}$ y $\boldsymbol{b = rsen\theta}$, luego se escriben en el orden correspondiente $a + bi$.

Ejemplos:

- $-4 + 4i$, para escribirlo en la forma polar debemos calcular el módulo y el argumento
  $= \sqrt{(-4)^2 + (4)^2}$ $\qquad \theta = tan^{-1}\left(\frac{4}{-4}\right)$
  $r = \sqrt{16 + 16}$ $\qquad \theta = tan^{-1}(-1)$
  $r = \sqrt{32}$ $\qquad \theta = 135°$
  $r = 4\sqrt{2}$
  De donde, $-4 + 4i = 4\sqrt{2}\,(\cos 135° + i\ sen\ 135°) = 4\sqrt{2}\ cis\ 135°$

- $4\ cis\ 172°$, para escribirlo en la forma algebraica buscamos módulo y argumento
  $r = 4$ y $\theta = 172°$
  $\cos 172° = -0.9903,\ \ sen\ 172° = 0{,}1392$

  Entonces
  $4\ cis\ 172° = 4(-0{,}9903 + i\ 0{,}1392) = -3{,}96 + 0{,}56i$

- $-5i$, la forma algebraica completa sería $0 - 5i$
  $r = \sqrt{(-5)^2} = \sqrt{25} = 5$
  $\theta = 270°$

  Podemos decir entonces, $-5i = 5\ (\cos 270° + i\ sen\ 270°) = 5\ cis\ 270°$

- $\sqrt{6}\ cis\ \frac{2\pi}{3}$

$$r = \sqrt{6} \text{ y } \theta = \frac{2\pi}{3} = 120°$$

$$a = \sqrt{6}\cos 120° = \sqrt{6}\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{\sqrt{6}}{2}$$

$$b = \sqrt{6}\,sen\ 120° = \sqrt{6}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

Entonces, $\sqrt{6}\ cis\ \frac{2\pi}{3} = -\frac{\sqrt{6}}{2} + \frac{3\sqrt{2}}{2}i$

Taller Sumativo #2
(Valor 100 puntos)

Exprese los siguientes números complejos en forma polar: (10 puntos cada uno)

- $5i$
- $-1+i\sqrt{2}$
- $2-2i$
- $3+4i$
- $-5-12i$
- -8

Escriba los siguientes números complejos en su forma algebraica: (6 puntos cada uno)

- 5(cos180°+isen180°)
- 3,5cis90°
- 4cis270°
- 3cis150°
- 7cisπ

Tema #4
Multiplicación y división de dos números complejos expresados en su formapolar.

El producto o multiplicación de dos números complejos expresados en su forma polar, da como resultado un nuevo número complejo expresado en forma polar, cuyo módulo resulta de multiplicar los módulos de ambos números y el argumento resulta de sumar los argumentos de ambos números.

Ejemplos:

✓ $(6cis45°)(8cis30°)$
$= (6)(8)\ cis\ (45° + 30°)$
$= 48\ cis\ 75°$

✓ $\left(5cis\frac{\pi}{4}\right)\left(4cis\frac{\pi}{2}\right)$ $\frac{\pi}{4} = 45°$ $\frac{\pi}{2} = 90°$
$= (5)(4)cis\ (45° + 90°)$
$= 20\ cis\ 135°$

✓ $(4cis200°)\left(\frac{3}{8}cis190°\right)$ * 390° - 360° = 30°

$$= (4)\left(\frac{3}{8}\right) cis\ (200° + 190°)$$
$$= \frac{3}{2}\ cis\ 390° \quad *$$
$$= \frac{3}{2}\ cis\ 30°$$

El cociente o división de dos números complejos expresados en su forma polar, da como resultado un nuevo número complejo expresado en forma polar, cuyo módulo resulta de dividir los módulos de ambos números y el argumento resulta de restar los argumentos de ambos números.

Ejemplos:

~ $\dfrac{12cis12°}{3cis250°}$

$$= \frac{12}{3}\ cis\ (12° - 250°)$$
$$= 4\ cis - 238° = 4\ cis\ 122°$$

~ $(4cis190°) \div (2cis70°)$

$$= \frac{4}{2}\quad cis\ (190° - 70°)$$
$$= 2\ cis\ 120°$$

~ $\dfrac{(25cis100°)(2cis80°)}{(4cis25°)(10cis30°)}$

$$= \frac{(25)(2)\ cis\ (100° + 80°)}{(4)(10)\ cis\ (25° + 30°)}$$
$$= \frac{50\ cis\ 180°}{40\ cis\ 55°}$$
$$= \frac{50}{40}\ cis\ (180° - 55°)$$
$$= \frac{5}{4}\ cis\ 125°$$

*** Observación:**
Si en el producto el argumento da mayor de 360°, buscamos el ángulo coterminal menor, restándole 360°. Si en el cociente el argumento da un ángulo negativo buscamos el ángulo positivo sumando 360°.

Taller Sumativo #3
(Valor 70 puntos)

Encuentro el producto de los siguientes números complejos en su forma polar: (7puntos cada uno)

- $\left(12\ cis\ \frac{\pi}{2}\right)\left(8{,}0\ cis\ \frac{\pi}{4}\right)$
- $(3\ cis\ 70°)(cis\ 240°)$
- $\left(\sqrt{2}\,cis\ 157°\right)\left(8\sqrt{6}\ cis\ 284°\right)$
- $\left(6\ cis\ \frac{3\pi}{4}\right)\left(4\ cis\ \frac{\pi}{2}\right)$

Determine el cociente de los siguientes números complejos en la forma polar

- $(7{,}3\ cis\ 73{,}0°) \div (8{,}7\ cis\ 97{,}9°)$ (7puntos)
- $\frac{4\ cis\ 190°}{2\ cis\ 70°}$ (7 puntos)
- $\frac{(45\ cis\ 200°)(\ 3\ cis\ 80°)}{(2\ cis\ 92°)(4\ cis\ 115°)}$ (17 puntos)

Taller de Apreciación #2
(Valor 60 puntos)

- Simplifique y exprese los siguientes números en términos de la unidad imaginaria: (5 puntos cada una)

1) $\sqrt{-32}$

2) $\sqrt{-25}$

3) $-\sqrt{-72}$

4) $\sqrt{-5}$

5) $\sqrt{-\frac{1}{36}}$

♣ Represente los siguientes números complejos como punto: 12 puntos

1) $A = -3 + 2i$

2) $B = 2 + 4i$

3) $C = 2i$

4) $D = 3 - 2i$

5) $E = 6 + 3i$

♣ Represente los siguientes números complejos como vector: 12 puntos

1) $F = 3 + 7i$

2) $G = -8 + 9i$

3) $H = -5i$

4) $I = -9 + 4i$

5) $J = 12 - 9i$.