MINITERIO DE EDUCACIÓN

INSTITUTO PTOFESIONAL Y TÉCNICO MÉXICO PANAMÁ

GUIA DE AUTOINSTRUCCIÓN

MATEMÁTICA 12°

D, G, H

BACHILLER EN CIENCIAS Y AGROPECUARIA

PROFESORA:

IRIS CASTILLO CASTILLO

II TRIMESTRE 2022

INDICACIONES GENERALES PARA EL DESARROLLO DE LA GUÍA DIDÁCTICA

Al iniciar el desarrollo de cada tema:

1. Lee el tema (parte teórica), con calma.
2. Analiza los procedimientos, de cada ejemplo resuelto, verificando paso a paso el desarrollo de los mismos. Este paso será fundamental, ya que los problemas, de los ejercicios que deberás entregar, se parecerán a dichos ejemplos.
3. Por último, procede a resolver los ejercicios, que están al final del contenido de la guía (todos los Temas); sigue las indicaciones generales, los de cada encabezado y **ENTREGA EN FÍSICO EL DÍA INDICADO, en cada Taller.**

- **Indicaciones generales, para los Talleres sumativos 2, 3, 4 y 5:**
  - ✓ Resuelva el Taller a manuscrito, en hoja blanca o de raya.
  - ✓ No tache, ni utilice líquido corrector.
  - ✓ Resuelva en forma clara y ordenada, lo que no sea legible será considerado incorrecto.
  - ✓ Si los procedimientos no aparecen la respuesta, será considerada incorrecta.
  - ✓ Recuerde colocar la respuesta final, con tinta negra o azul, de lo contrario, no tendrá derecho a reclamo.

Observaciones:

No es un trabajo en grupo, es un trabajo totalmente individual por lo tanto no puede haber dos o más trabajos exactamente iguales, aunque las actividades sean las mismas.

PARA CONSULTAS Y MATERIAL DE APOYO, SE LES ESTARA ENVIADO UN ENLACE, PARA UNIRSE AL GRUPO DE WASAP DE ESTA MATERIA, CON UN ESTUDIANTE DE CADA GRUPO, PREVIAMENTE ESCOGIDO.
Número de contacto, de la profesora: 6405-6044

Contenido

Temas #2, 3, 4, 5

Área: Cálculo diferencial

Temas:

2. Concepto y propiedades de los límites
3. Límites indeterminados
4. Límites unilaterales
5. Límites infinitos y límites al infinito

Objetivo de aprendizaje:

1. Verifica la existencia del límite y continuidad de una función.

Indicadores de logros:

1. Explico con disposición el concepto de límite de una función.
2. Aplico con precisión, las propiedades de los limites.
3. Aplico correctamente la forma de eliminar la indeterminación, al calcular el límite de una función.
4. Calculo los límites unilaterales de una función aplicando el teorema correspondiente.
5. calculo con seguridad, la existencia del límite de una función, aplicando los teoremas correspondientes.

Contenido

TEMA #.2

CONCEPTO Y PROPIEDADES DE LOS LÍMITES

A. Concepto de límite

Todos tenemos la idea del significado de acercarse o aproximarse a algo. Por ejemplo, si caminamos hacia una pared sabemos que con cada paso que demos en la dirección donde ésta se encuentra, nos acercamos más a ella.

Esta misma situación la podemos tener en el conjunto de los números reales. Si nos ubicamos en una recta numérica y nos piden acercarnos a un determinado número real, por ejemplo, el 3, podemos hacerlo mediante una sucesión de valores crecientes que también tiendan a 3 y otra sucesión de valores decrecientes que también tiendan a 3. Así,

Valores crecientes

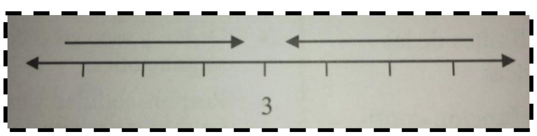
2 ; 2,1 ; 2,3 ; 2,5 ; 2,6 ; 2,7 ; 2,8 ; 2,9 ; 2,99; 2,999; . . . , 3

podemos continuar de este modo para estar más y más cerca de 3.

Valores decrecientes

4; 3,5 ; 3,4 ; 3,3 ;3,2 ; 3,1 ; 3,01 ; 3,001 ; . . . , 3

Nuestra aproximación a 3 nos mostro que tenemos dos formas de llegar a 3; por una vamos subiendo, nuestros números son cada vez más grandes pero menores que 3; por la otra vamos bajando, nos aproximamos por medio de números cada vez más pequeños pero mayores que 3. En la recta numérica veremos expresada, la situación anterior



Ejemplo: considera la función $y = x + 2$

Elabora una tabla de valores crecientes de x que tiendan a 3 y otra con valores decrecientes de x que también tiendan a 3.

Valores crecientes

x	0	0,5	1,0	1,5	2,5	2,9	2,99	2,999	$\rightarrow$ 3
y	2	2,5	3,0	3,5	4,5	4,9	4,99	4,999	$\rightarrow$ 5

Valores decrecientes

x	4	3,5	3,4	3,3	3,2	3,1	3,01	3,001	$\rightarrow$ 3
y	6	5,5	5,4	5,3	5,2	5,1	5,01	5,001	$\rightarrow$ 5

A medida que se toman valores para x más cercanos a 3, se observa que $f(x)$ se va acercando a 5. Esta es la primera idea que tendremos sobre el límite de una función en un punto dado.

Podemos afirmar que cuando x tiende a 3, entonces $f(x)$tiende a 5. En este caso decimos que el límite de la función $y = x + 2$ cuando x tiende a 3 se simboliza así: $x \to 3$ entonces $f(x)$ tiende a 5 se simboliza $f(x) \to 5$, y se escribe:

$$\lim_{x \to 3} f(x) = 5 \quad \text{o sea} \quad \lim_{x \to 3}(x+2) = 5$$

Si existe un número L tal que $f(x)$ esté cerca de L para todos los valores de x próximos a un número a, se dice que:

$$\lim_{x \to 3} f(x) = L$$

B. Propiedades de los límites

El cálculo de límites por el método de las sucesiones de la variable independiente, sería una labor agotadora y extensa. El propósito de esta sección en presentar las propiedades que son muy útiles para el cálculo de límites de funciones en forma directa.

1. **Propiedad del múltiplo constante:** $\lim_{x \to a} k \cdot f(x) = k\left[\lim_{x \to a} f(x)\right]$, k es una constante y f es una función.

2. **Propiedad de la potencia:** $\lim_{x \to a} [f(x)]^n = \left[\lim_{x \to a} f(x)\right]^n$, n es un número natural

3. **Propiedad de la suma o, de la diferencia:** $\lim_{x \to a} [f(x) \pm g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) \pm \lim_{x \to a} g(x)$, si f y g son funciones.

4. **Propiedad del cociente:** $\lim_{x \to a}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{\lim_{x \to a} f(x)}{\lim_{x \to a} g(x)}$, si $\lim_{x \to a} g(x) \neq 0$

5. **Propiedad de la función identidad:** $\lim_{x \to a} x = a$,

6. **Propiedad de la función constante:** $\lim_{x \to a} k = k$, k es una constante.

7. **Propiedad del producto:** $\lim_{x \to a} (f(x) \cdot g(x)) = \left[\lim_{x \to a} f(x)\right] \cdot \left[\lim_{x \to a} g(x)\right]$, f y g son funciones.

8. **Propiedad de la raíz** $\lim_{x \to a} \sqrt{f(x)} = \sqrt{\lim_{x \to a} f(x)}$

En general, podemos decir que si $f(x)$ es un polinomio, entonces $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$

Ejemplos:

1. $\lim\limits_{x\to 1} 3 = 3$

2. $\lim\limits_{x\to -2} \pi = \pi$

3. $\lim\limits_{x\to 2} 5x = 5 \lim\limits_{x\to 2} x = 5(2) = 10$

4. $\lim\limits_{x\to 1} x^{10} = \left[\lim\limits_{x\to 1} x\right]^{10} = 1^{10} = 1$

5. $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{\sqrt{x+1}}{x-4} = \dfrac{\sqrt{\lim\limits_{x\to 3}(x+1)}}{\lim\limits_{x\to 3}(x-4)} = \dfrac{\sqrt{\lim\limits_{x\to 3} x + \lim\limits_{x\to 3} 1}}{\lim\limits_{x\to 3} x - \lim\limits_{x\to 3} 4} = \dfrac{\sqrt{3+1}}{3-4} = -2$

6. $\lim\limits_{x\to -4} (x+3)^2 = \left[\lim\limits_{x\to -4}(x+3)\right]^2 = \left[\lim\limits_{x\to -4} x + \lim\limits_{x\to -4} 3\right]^2 = (-4+3)^2 = 1$

7. $\lim\limits_{x\to 2}\left(-x^2 + x - 2\right) = \lim\limits_{x\to 2}\left(-x^2\right) + \lim\limits_{x\to 2} x - \lim\limits_{x\to 2} 2 = -(2)^2 + 2 - 2 = -4$

8. $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^2+1}{x} = \dfrac{\lim\limits_{x\to -1}\left(x^2+1\right)}{\lim\limits_{x\to -1} x} = \dfrac{\lim\limits_{x\to -1} x^2 + \lim\limits_{x\to -1} 1}{\lim\limits_{x\to -1} x} = \dfrac{(-1)^2+1}{-1} = -2$

9. $\lim\limits_{x\to\sqrt{2}} \left(x^2+3\right)(x-4) = \left[\lim\limits_{x\to\sqrt{2}}\left(x^2+3\right)\right]\left[\lim\limits_{x\to\sqrt{2}}(x-4)\right] = \left[\lim\limits_{x\to\sqrt{2}} x^2 + \lim\limits_{x\to\sqrt{2}} 3\right]\left[\lim\limits_{x\to\sqrt{2}} x - \lim\limits_{x\to\sqrt{2}} 4\right]$

$$= \left[\left(\sqrt{2}\right)^2 + 3\right]\left[\sqrt{2} - 4\right] = (2+3)\left(\sqrt{2}-4\right) = 5\left(\sqrt{2}-4\right)$$

10. $\lim\limits_{x\to 5} \sqrt[3]{3x^2 - 4x + 9} = \sqrt[3]{\lim\limits_{x\to 5}\left(3x^2 - 4x + 9\right)} = \sqrt[3]{\lim\limits_{x\to 5} 3x^2 - \lim\limits_{x\to 5} 4x + \lim\limits_{x\to 5} 9}$

$$= \sqrt[3]{3\lim\limits_{x\to 5} x^2 - 4\lim\limits_{x\to 5} x + \lim\limits_{x\to 5} 9} = \sqrt[3]{3(25) - 4(5) + 9} = \sqrt[3]{64} = 4$$

Curiosidades matemáticas... 

Los **números negativos empezaron a usarse en la India en el siglo VII** para indicar las deudas. Sin embargo, hasta el **s. XVIII** los números negativos no fueron **aceptados universalmente.**

TEMA #.3

LÍMITES INDETERMINADOS

En algunos casos, cuando se desea calcular el límite de una función racional, se aplica la propiedad del cociente de dos funciones y se obtiene una expresión de la forma $\frac{0}{0}$, o de la forma $\frac{\infty}{\infty}$, se dice que el límite es indeterminado.

Para quitar la forma indeterminada $\frac{0}{0}$, tenemos que averiguar cuál es la transformación que hay que realizar para quitar la indeterminación utilizando operaciones algebraicas sencillas.

Las expresiones $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$ se denominan indeterminaciones porque su resultado no es un único número real.

Si al aplicar las propiedades de los límites encontramos una indeterminación, entonces debemos proceder a eliminarla con el fin de saber si el límite existe o no.

Para eliminar o suprimir la indeterminación, se requiere de estrategias algebraicas. Tales como

a. Factorización de la expresión dada.
b. Racionalización de numerador o denominador multiplicando, el numerador y el denominador por la conjugada de la expresión donde aparecen los radicales.
c. Cancelación de factores iguales .
d. Aplicación de las propiedades de los límites a la expresión resultante.

Ejemplos:

1. Calcula el $\lim\limits_{x \to -1} \frac{x^2 + 8x + 7}{x^2 - x - 2}$

SOLUCIÓN:

Reemplazamos a x por -1 en la función y aplicamos el límite del cociente de dos funciones.

$$\lim_{x \to -1} \frac{x^2 + 8x + 7}{x^2 - x - 2} = \lim_{x \to -1} \frac{(-1)^2 + 8(-1) + 7}{(-1)^2 - (-1) - 2} = \lim_{x \to -1} \frac{1 - 8 + 7}{1 + 1 - 2} = \frac{0}{0}$$

El límite es indeterminado.

Como $\frac{0}{0}$ es una expresión indeterminada. En este caso, factorizamos numerador y denominador.

Refuerzo

La técnica de cancelación, se utiliza cuando es posible factorizar el polinomio del numerador o del denominador de la función racional.

$$\lim_{x\to -1} \frac{x^2+8x+7}{x^2-x-2} = \lim_{x\to -1} \frac{(x+1)(x+7)}{(x+1)(x-2)}.$$

Cancelamos (x + 1) en el numerador y en el denominador, nos queda:

$$\lim_{x\to -1} \frac{x+7}{x-2}$$

En la nueva función equivalente reemplazamos a x por -1

Así que $\lim_{x\to -1} \frac{x+7}{x-2} = \left[\frac{(-1)+7}{(-1)-2}\right] = \frac{6}{-3} = -2$

2) Calcula $\lim_{x\to 0} \frac{4-\sqrt{16+x}}{x}$

SOLUCIÓN:

Sustituyendo a x por 0 en la función, nos queda:

$$\lim_{x\to 0} \frac{4-\sqrt{16+x}}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{4-\sqrt{16+0}}{0} = \lim_{x\to 0} \frac{4-4}{0} = \frac{0}{0}$$

El límite es indeterminado. En este caso, para quitar la forma indeterminada $\frac{0}{0}$, multiplicamos el numerador y el denominador por la conjugada del numerador.

$$\lim_{x\to 0} \frac{4-\sqrt{16+x}}{x} \cdot \frac{4+\sqrt{16+x}}{4+\sqrt{16+x}} = \lim_{x\to 0} \frac{16-(16+x)}{x\left(4+\sqrt{16+x}\right)}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{16-16-x}{x\left(4+\sqrt{16+x}\right)} = \lim_{x\to 0} \frac{-x}{x\left(4+\sqrt{16+x}\right)} = \lim_{x\to 0} \frac{-1}{4+\sqrt{16+x}} = \frac{-1}{4+4} = -\frac{1}{8}$$

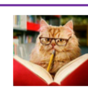
Refuerzo

La técnica de racionalización:
Se emplea cuando podemos multiplicar y dividir por una expresión igual a uno.
Se racionaliza al denominador o numerador.

Refuerzo

Recuerde: La conjugada de $a+b$ es $a-b$ y la de $a-b$ es $a+b$

Curiosidades matemáticas...



Hasta el siglo XVI, las **multiplicaciones** se consideraban tan difíciles que sólo se enseñaban en las **universidades**.

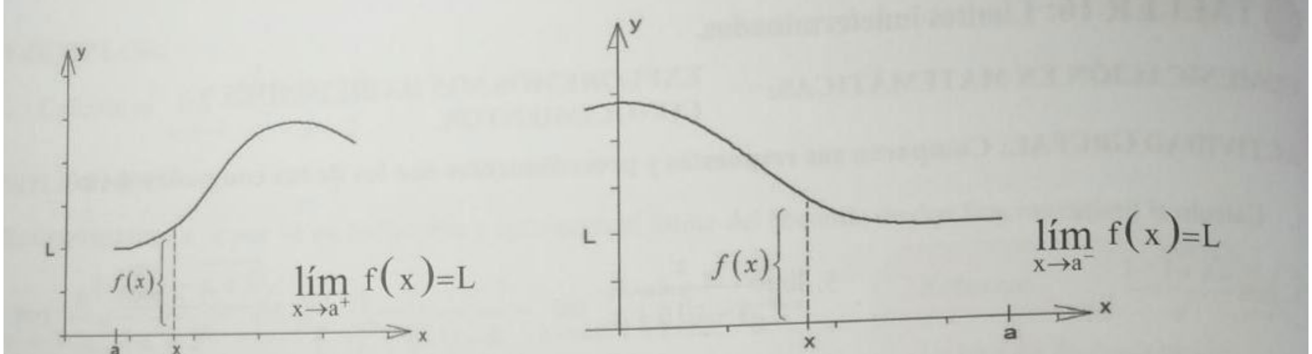
TEMA #.4

LÍMITES UNILATERALES

Al iniciar el estudio de los límites dijimos que podíamos acercarnos a un número real por dos caminos distintos. Por un lado, caminamos por valores menores y, por el otro, por valores mayores que el real al que nos estamos aproximando. Cuando nos acercamos a un real dado con valores menores que él, diremos que tendemos por la izquierda, si lo hacemos a través de valores mayores, diremos que tendemos por la derecha.

Para denotar el límite derecho usaremos la notación $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = L$ y para el límite izquierdo, $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = L$

Donde L es el límite derecho y es el límite izquierdo de la función f(x).



A menudo es útil considerar el límite de la función cuando x tiende a un número dado desde la derecha o desde la izquierda.

Ejemplos:

1. Calcular los límites derecho e izquierdo cuando x tiende a 3, de la función,

$$f(x) = \begin{cases} 2x^2 - 5 & \text{para } x \geq 3 \\ 5x - 4 & \text{para } x < 3 \end{cases}$$

SOLUCIÓN:

En primer lugar, calculemos $\lim\limits_{x \to 3^+} f(x)$. En este caso, $x > 3$, por tanto, $f(x) = 2x^2 - 5$.

Ahora $\lim\limits_{x \to 3^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 3^+} (2x^2 - 5) = 2(3)^2 - 5 = 13$

Seguidamente, calculemos $\lim\limits_{x \to 3^-} f(x)$, para este caso, $x < 3$, por lo cual consideramos

$f(x) = 5x - 4$, así: $\lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 3^-} (5x - 4) = 5(3) - 4 = 11$

Vemos que el límite de f(x), tanto por la derecha como por la izquierda son diferentes.

2. Dada la función, averiguamos si los límites por la derecha e izquierda son iguales o diferentes.

$$g(x) = \begin{cases} -1, & \text{si } x < 0 \\ 0, & \text{si } x = 0 \\ 1, & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

SOLUCIÓN:

El $\lim\limits_{x \to 0^+} g(x) = 1$ y el $\lim\limits_{x \to 0^-} g(x) = -1$, observamos que el $\lim\limits_{x \to 0^+} g(x) \neq \lim\limits_{x \to 0^-} g(x)$,

Concluimos que los límites de la función g(x), tanto por la derecha como por la izquierda son diferentes.

El siguiente teorema nos dará la relación existente entre el límite de una función y los límites laterales.

Dada una función f, entonces $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$, si y sólo si:

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to a^-} f(x) = L$$

El teorema nos indica que, si el límite existe entonces los límites laterales, existen y son iguales en la otra dirección, que, si los límites laterales existen y son iguales, entonces el límite existe y su valor es igual al de los límites laterales.

Ejemplos:

1. Investigar si el límite de la función f existe cuando x tiende a 5.

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{3x^2 + 6}, & \text{si } x > 5 \\ 2x - 1, & \text{si } x \leq 5 \end{cases}$$

SOLUCIÓN:

Calculemos los límites laterales

$$\lim_{x \to 5^+} f(x) = \lim_{x \to 5^+} \sqrt{3x^2 + 6} = \sqrt{3(25) + 6} = \sqrt{81} = 9$$

$$\lim_{x \to 5^-} f(x) = \lim_{x \to 5^-} (2x - 1) = 2(5) - 1 = 9$$

De donde :

$$\lim_{x \to 5^+} f(x) = \lim_{x \to 5^-} f(x) = 9$$

Por tanto:

El límite de la función existe y es igual a:

$$\lim_{x \to 5} f(x) = 9$$

2. Considere la función f definida a continuación

$$f(x) = \begin{cases} x + 2, & \text{si } x \leq 5 \\ 10 - x, & \text{si } x > 5 \end{cases}$$

Calcule $\lim\limits_{x \to 5^+} f(x)$, $\lim\limits_{x \to 5^-} f(x)$ y $\lim\limits_{x \to 5} f(x)$

SOLUCIÓN:

$$\lim_{x \to 5^+} f(x) = \lim_{x \to 5^+} (10 - x) = 5$$

$$\lim_{x \to 5^-} f(x) = \lim_{x \to 5^-} (x + 2) = 7$$

Concluimos que el $\lim\limits_{x \to 5} f(x)$, no existe,

porque $\lim\limits_{x \to 5^+} f(x) \neq \lim\limits_{x \to 5^-} f(x)$

Curiosidades matemáticas... 

El escritor de Alicia en el país de las maravillas, **Lewis Carroll, era matemático.**

TEMA #.5

LÍMITES INFINITOS Y LÍMITES AL INFINITO

A. Límites infinitos

Vamos a ver otra manera en que la existencia de límite puede fallar: si la función tiene una discontinuidad infinita.

Si el valor de una función crece sin límite cuando x tiende a c, entonces $\lim\limits_{x\to c}$ no existe. Sin embargo, se puede escribir: $\lim\limits_{x\to c} f(x) = +\infty$ para indicar que f (x) crece sin límite.

Si el valor de una función decrece sin límite cuando x tiende a c, entonces $\lim\limits_{x\to c}$ no existe. Sin embargo, se puede escribir: $\lim\limits_{x\to c} f(x) = -\infty$ para indicar que f (x) decrece sin límite.

Ejemplos:

Determinar el límite de cada función cuando x→ 1 por ambos lados.

Solución:

1. $\lim\limits_{x\to 1^-} \frac{1}{x-1} = -\infty$ y $\lim\limits_{x\to 1^+} \frac{1}{x-1} = \infty$

2. $\lim\limits_{x\to 1^-} \frac{1}{(x-1)^2} = \infty$ y $\lim\limits_{x\to 1^+} \frac{1}{(x-1)^2} = \infty$

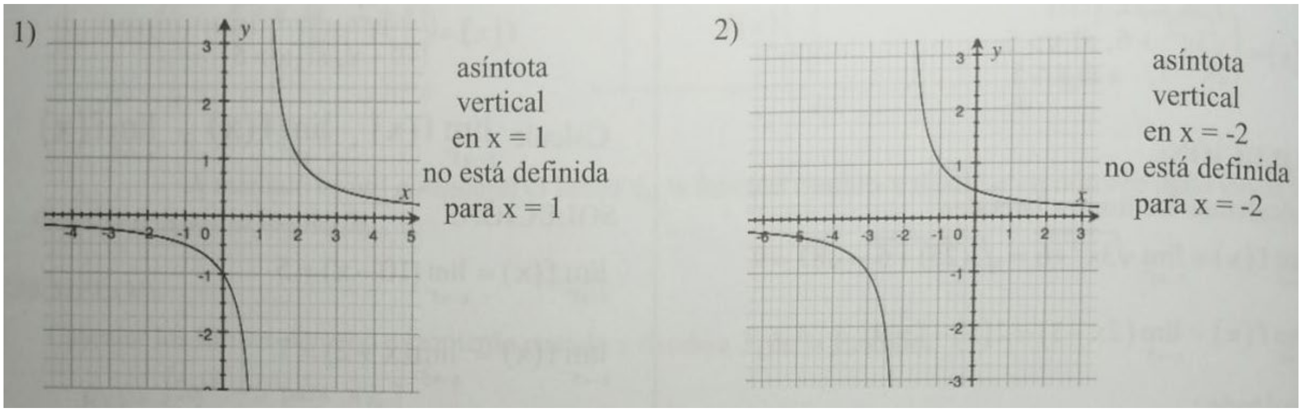
3. $\lim\limits_{x\to 1^-} \frac{-1}{x-1} = \infty$ y $\lim\limits_{x\to 1^+} \frac{-1}{x-1} = -\infty$

4. $\lim\limits_{x\to 1^-} \frac{-1}{(x-1)^2} = -\infty$ y $\lim\limits_{x\to 1^+} \frac{-1}{(x-1)^2} = -\infty$

Asíntota vertical

Si $f(x)$ tiende a $+\infty$ o $-\infty$ cuando $\underline{x}$ tiende a $\underline{c}$ por la izquierda o por la derecha, diremos que la recta $x = c$ es una asíntota vertical de la gráfica de $f(x)$

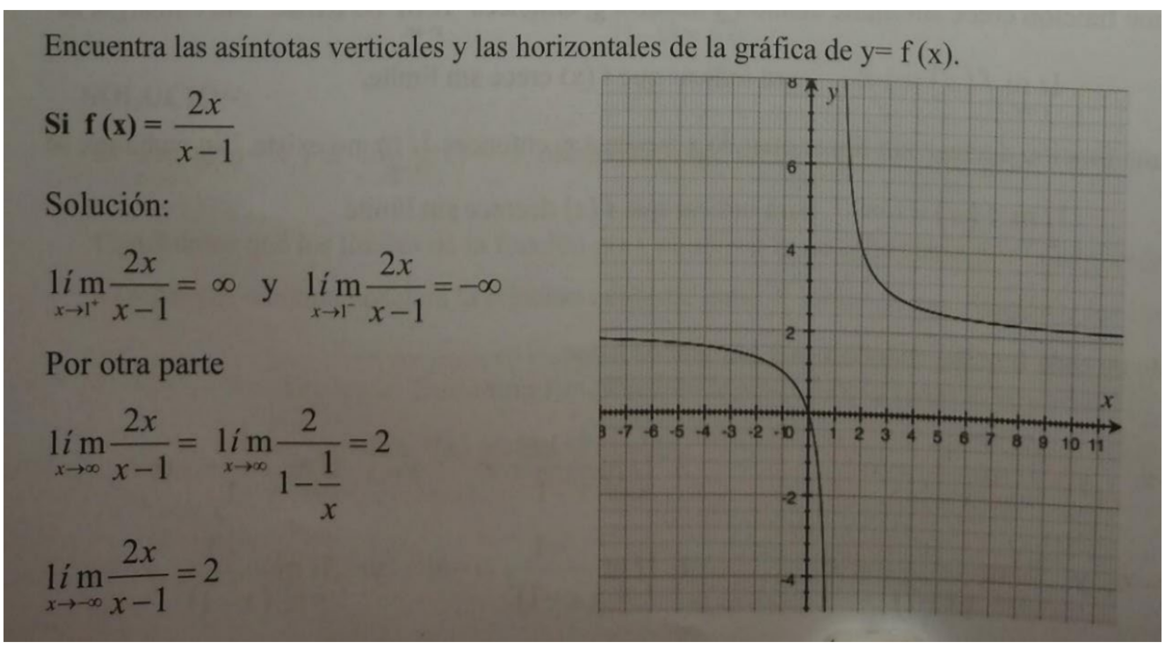
Ejemplos:



Se dice que la recta $x = a$ es una asíntota vertical de la gráfica de la función f si al menos uno de los siguientes enunciados es verdadero:	
$\boldsymbol{i})\ \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \to +\infty$ conforme $x \to a^+$	$\boldsymbol{iii})\ \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \to +\infty$ conforme $x \to a^-$
$\boldsymbol{ii})\ \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \to -\infty$ conforme $x \to a^+$	$\boldsymbol{iv})\ \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \to -\infty$ conforme $x \to a^-$

Se dice que la línea y$=$ b es una asíntota horizontal de la gráfica de la función f si al menos uno de los siguientes enunciados es verdadero:	
$\boldsymbol{i})\ \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \to b^+$ conforme $x \to +\infty$	$\boldsymbol{iii})\ \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \to b^-$ conforme $x \to +\infty$
$\boldsymbol{ii})\ \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \to b^+$ conforme $x \to -\infty$	$\boldsymbol{iv})\ \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \to b^-$ conforme $x \to -\infty$

Ejemplos:



Encuentra las asíntotas verticales y las horizontales de la gráfica de y= f (x).

Si $\mathbf{f(x)} = \dfrac{2x}{x-1}$

Solución:

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{2x}{x-1} = \infty \quad \text{y} \quad \lim_{x\to 1^-} \frac{2x}{x-1} = -\infty$$

Por otra parte

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x}{x-1} = \lim_{x\to\infty} \frac{2}{1-\frac{1}{x}} = 2$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{2x}{x-1} = 2$$

Entonces la recta $y = 2$ es una asíntota horizontal. Y la recta $x = 1$ es una asíntota vertical.

B. Límites al infinito

Si al aplicar las propiedades de los límites encontramos una indeterminación, entonces debemos proceder a eliminarla con el fin de saber si el límite existe o no.

Hasta el momento hemos analizado, la forma $\frac{0}{0}$. Sin embargo, también es posible analizar el comportamiento de la "f (x)", cuando "x" toma valores cada vez más grandes positivos o negativos, es decir, cuando $x \to +\infty$ o cuando $x \to -\infty$. Esta clase de límites son muy importantes y se denominan **límites al infinito**.

Debe quedar bien claro que el signo "∞" no es un número, es sólo una manera de indicar que una cantidad crece tanto que no podemos determinar su crecimiento.

Veamos el siguiente cuadro:

1. $\infty + k = \infty$, k es una constante.
2. $k - \infty = -\infty$, k es una constante.
4. $\infty \cdot k = \infty$, $k \neq 0$.
6. $\infty + \infty = \infty$
5. $\frac{k}{\infty} = 0$, $k = 0$
6. $\infty \cdot (\pm\infty) = \pm\infty$.

Consideremos los siguientes límites cuando $x \to +\infty$ o cuando $x \to -\infty$.

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0 \qquad \lim_{x \to +\infty} \frac{k}{x^n} = 0 \qquad \lim_{x \to -\infty} \frac{k}{x^n} = 0$$

siendo k un número real cualquiera y n cualquier entero positivo

Recuerda:

El símbolo $x \to +\infty$ significa que x crece sin límite, tomando valores positivos.

El procedimiento general para eliminar indeterminaciones de la forma $\frac{\infty}{\infty}$ es el siguiente:

1. Dividimos cada término del numerador y del denominador por la potencia de mayor exponente que aparezca en la expresión.
2. Simplificamos la expresión resultante.
3. Aplicamos las propiedades de los límites.
4. Aplicamos $\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x^n} = 0$, donde sea posible.

Refuerzo

El signo = en

$l\acute{\imath}m\ f(x) = \infty$

no significa que el límite existe.

Ejemplos:

1) Calcula $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3x^3-4x+2}{7x^3+5}$

SOLUCIÓN:

Aplicando el procedimiento, tenemos que dividir por x^3 y simplificamos.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{3x^3-4x+2}{7x^3+5}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\dfrac{3x^3-4x+2}{x^3}}{\dfrac{7x^3+5}{x^3}}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{3-\dfrac{4}{x^2}+\dfrac{2}{x^3}}{7+\dfrac{5}{x^3}}=\frac{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(3-\dfrac{4}{x^2}+\dfrac{2}{x^3}\right)}{\lim\limits_{x\to+\infty}\left[7+\dfrac{5}{x^3}\right]}$$, límite de un cociente

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{3-4\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x^2}+2\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x^3}}{\lim\limits_{x\to+\infty}7+5\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x^3}}$$, límite de una suma

$$=\frac{3-0+0}{7+0}=\frac{3}{7},$$

límite de una constante y $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{k}{x^n}=0$

2) Calcula $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{4x^5-1}{3x^3+7}$

SOLUCIÓN:

Dividimos por x^5 tanto el numerador como a el denominador

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\dfrac{4x^5-1}{x^5}}{\dfrac{3x^3+7}{x^5}}=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{4-\dfrac{1}{x^5}}{\dfrac{3}{x^2}+\dfrac{7}{x^5}}\right),$$

simplificamos

$$=\frac{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(4-\dfrac{1}{x^5}\right)}{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{3}{x^2}+\dfrac{7}{x^5}\right)}$$, límite de un cociente

$$=\frac{\lim\limits_{x\to+\infty}4-\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x^5}}{\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3}{x^2}+\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{7}{x^5}}$$, límite de una suma

$$=\frac{4-0}{0+0}=\frac{4}{0}=\infty$$, no existe.

3) Calcula $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{2x+5}{x^2-7x+3}\right)$

SOLUCIÓN:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2x+5}{x^2-7x+3}\right)$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\dfrac{2x+5}{x^2}}{\dfrac{x^2-7x+3}{x^2}}\right)$$, dividimos por x^2

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\dfrac{2}{x}+\dfrac{5}{x^2}}{1-\dfrac{7}{x}+\dfrac{3}{x^2}}\right)$$, simplificamos

$$=\frac{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{2}{x}+\dfrac{5}{x^2}\right)}{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\dfrac{7}{x}+\dfrac{3}{x^2}\right)}$$, límite de un cociente

$$=\frac{\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2}{x}+\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{5}{x^2}}{\lim\limits_{x\to+\infty}1-\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{7}{x}+\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3}{x^2}}$$, límite de una suma

$$=\frac{0+0}{1-0+0}=\frac{0}{1}=0$$, límite de una constante y $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{k}{x^n}=0$

4) Calcule $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{4x-5}{\sqrt{2x^2+3}}$

SOLUCIÓN:

Se divide numerador y denominador por x.

Como $\sqrt{x^2}=x$ para $x>0$, tenemos que:

$$\frac{4x-5}{\sqrt{2x^2+3}}=\frac{\frac{(4x-5)}{x}}{\frac{\left(\sqrt{2x^2+3}\right)}{\sqrt{x^2}}}=\frac{4-\frac{5}{x}}{\sqrt{2+\frac{3}{x^2}}}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{4x-5}{\sqrt{2x^2+3}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{4-\frac{5}{x}}{\sqrt{2+\frac{3}{x^2}}}$$

$$=\frac{4-0}{\sqrt{2+0}}=\frac{4}{\sqrt{2}}=2\sqrt{2}$$

Por tanto:

En general:

Cuando la variable tiende al infinito positivo, escribiremos $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$.

Si $x\to\infty$ y la expresión es una fracción:

1. Si el grado del numerador es mayor que el del denominador la fracción tiende a infinito.
2. Si el grado del numerador es menor que el del denominador la fracción tiene límite cero.
3. Si los grados del numerador y del denominador son iguales la fracción tiene un límite distinto de cero.

TALLERES SUMATIVOS
1, 2, 3, 4, 5

Recuerde las indicaciones generales para cada Taller, descritas en la página 2 de esta guía didáctica, correspondiente al II Trimestre (2022).

Taller sumativo #.1

Nombre: ______________________ Grado: _____ Bachiller: ___________
Fecha de entrega: **05-09-2022** Valor: 58 puntos Puntos obtenidos: _____

Resuelve las siguientes funciones cuadráticas, resolviendo cada punto en orden:

1) ¿La función es cuadrática? (1 pt.)
2) Coloque los valores de a, b, c (3 pts.)
3) Hacia donde abre la función y por qué (2 pts.)
4) Coloque la intersección con el eje y (2 pts.)
5) Encuentre el vértice (6 pts.)
6) Escriba el rango para esa función (2 pts.)
7) Graficar la función
    - Tabla (3 pts.)
    - Cálculos para encontrar los valores de la tabla, pueden ser tres o cuatro. (3 pts.)
    - Gráfica (7 pts.)

$a)\ f(x) = x^2 + 1$

$b) f(x) = x^2 - 2x + 3$

Nota: debe guiarse de los ejemplos resueltos del Tema #1, que están en su cuaderno y que fue dado en clases presenciales

Taller sumativo #.2

Nombre: ______________________ Grado: _____ Bachiller: ___________
Fecha de entrega: **05-09-2022** Valor: 35 puntos Puntos obtenidos: _____

Encuentra los siguientes límites, si existen. Debe guiarse de los últimos ejemplos del Tema #2, que está en esta guía. (7 pts. c/u)

1) $\lim_{x \to 3} \frac{x^2 + 5}{x^2 - 3}$

2) $\lim_{x \to 0} (2x + 1)$

3) $\lim_{x\to 1}(3x^2 - 2x^2 + 4)$

4) $\lim_{x\to 7}\dfrac{8}{x-3}$

5) $\lim_{x\to 6}(x+4)^3(x-6)^2$

Taller sumativo #.3

Nombre: ________________________ Grado: ______ Bachiller: ____________
Fecha de entrega: **24-08-2022** Valor: 40 puntos Puntos obtenidos: ______

Calcula el límite. Realiza los procedimientos completos, guiándote de los ejemplos 1 y 2, del Tema #3 (10 pts. c/u)

1) $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+1}-1}{x}$

2) $\lim_{x\to -3}\frac{x^2+4x+3}{x+3}$

3) $\lim_{x\to 0}\frac{x^2-3x+2}{x^2-4x+3}$

4) $\lim_{x\to 0}\frac{x^2+x+2}{(x-1)^2}$

Taller sumativo #.4

Nombre: ________________________ Grado: ______ Bachiller: ____________
Fecha de entrega: 1**5-09-2022** Valor: 16 puntos Puntos obtenidos: ______

1. Considere la función f definida a continuación. Calcule $\lim_{x\to 1^+} f(x)$, $\lim_{x\to 1^-} f(x)$, $\lim_{x\to 1} f(x)$: (8 pts.)

$$f(x) = \begin{cases} x-3 & si\ x \geq 1 \\ x^2 & si\ x < 1 \end{cases}$$

2. Considere la función f definida a continuación. Calcule $\lim_{x\to 3^+} f(x)$, $\lim_{x\to 3^-} f(x)$, $\lim_{x\to 3} f(x)$: (8 pts.)

$$b) f(x) = \begin{cases} x^2-1 & si\ x \leq 3 \\ 5x-7 & si\ x > 3 \end{cases}$$

Nota: debe guiarse de los ejemplos resueltos, al final del Tema #4

Taller sumativo #.5

Nombre: ______________________ Grado: _____ Bachiller: ___________
Fecha de entrega: **27-09-2022** Valor: 30 puntos Puntos obtenidos: _____

Hallar la norma de los siguientes números complejos: (10 pts. c/u)

1) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{4x^2 - 3}{2y^3 + 3y^2}$

2) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{6x^3 - 5x^2 + 3}{2x^3 + 4x - 7}$

3) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2 - 2x + 5}{8x^3 + x + 2}$

Nota: debe guiarse de los ejemplos resueltos, al final del Tema #5