



INDICACIONES GENERALES PARA EL DESARROLLO DE LA GUÍA DIDÁCTICA

Al iniciar el desarrollo de cada tema:

1. Lee el tema (parte teórica), con calma.
2. Analiza los procedimientos, de cada ejemplo resuelto, verificando paso a paso el desarrollo de los mismos. Este paso será fundamental, ya que los problemas, de los ejercicios que deberás entregar, se parecerán a dichos ejemplos.
3. Por último, procede a resolver los ejercicios, que están al final del contenido de la guía (todos los Temas); sigue las indicaciones generales, los de cada encabezado y **ENTREGA EN FÍSICO EL DÍA INDICADO, en cada Taller.**

➤ Indicaciones generales, para los Talleres sumativos 3, 4, 5 y 6:

- ✓ Resuelva el Taller a manuscrito, en hoja blanca o de raya.
- ✓ No tache, ni utilice líquido corrector.
- ✓ Resuelva en forma clara y ordenada, lo que no sea legible será considerado incorrecto.
- ✓ Si los procedimientos no aparecen la respuesta, será considerada incorrecta.
- ✓ Recuerde colocar la respuesta final, con tinta negra o azul, de lo contrario, no tendrá derecho a reclamo.

Observaciones:

No es un trabajo en grupo, es un trabajo totalmente individual por lo tanto no puede haber dos o más trabajos exactamente iguales, aunque las actividades sean las mismas.

PARA CONSULTAS Y MATERIAL DE APOYO, SE LES ESTARA ENVIADO UN ENLACE, PARA UNIRSE AL GRUPO DE WASAP DE ESTA MATERIA, CON UN ESTUDIANTE DE CADA GRUPO, PREVIAMENTE ESCOGIDO.

Número de contacto con la profesora: 6405-6044



Contenido



Temas #3, 4, 5, 6

Área: Álgebra

Temas:

3. Suma y resta de números complejos
4. Multiplicación de números complejos
5. División de números complejos
6. Norma de un número complejo

Objetivos de aprendizaje:

1. Representa números complejos en sus diferentes formas.
2. Resuelve operaciones con números complejos

Indicadores de logros:

1. Resuelve correctamente operaciones fundamentales con números complejos para su aplicación a otras ciencias.
2. Encuentra con precisión la norma, de números complejos.





Contenido



TEMA #.3

SUMA Y RESTA DE NÚMEROS COMPLEJOS

A. Suma de números complejos

Para sumar dos o más números complejos se suman, respectivamente, las partes reales y las partes imaginarias.

$$\text{Si } z, w \in \mathbb{C} \text{ con } z = a + bi \text{ y } w = c + di, \text{ entonces, } z + w = (a + c) + (b + d)i$$

La adición en el conjunto de los números complejos cumple con las siguientes propiedades:

- Clausurativa
- Conmutativa
- Asociativa
- Elemento neutro
- Inverso

B. Resta de números complejos

Para restar dos números complejos se restan, respectivamente, las partes reales y las partes imaginarias.

$$\text{Si } z, w \in \mathbb{C} \text{ con } z = a + bi \text{ y } w = c + di, \text{ entonces, } z - w = (a - c) + (b - d)i$$

RECUERDA:

Regla de los signos para la adición y la sustracción	Signos Iguales: Sumar y repetir el signo.	Signos Opuestos: Restar y anotar signo del mayor.
	$+3 + 5 = +8$ $-7 - 2 = -9$	$+3 - 8 = -5$ $-7 + 9 = +2$

Ejemplos

Resolver las siguientes sumas y restas de números complejos:

$$\begin{aligned}
 1) \quad & (-8 + 5i) + (6 - i) \\
 & = (-8 + 6) + (5 - 1)i \\
 & = -2 + 4i
 \end{aligned}$$

← Agrupas la parte real y agrupas la parte imaginaria, se separa con + siempre.
 ← Resultado al aplicar la regla de los signos para la adición y sustracción.

$$2) (15 - 14i) - (-18 + 3i)$$

$$= (15 + 18) + (-14 - 3)i$$

$$= 33 - 17i$$

← Los números complejos del segundo paréntesis, cambiaran de signo, por el signo - que lo precede.

← Observa que el -18 cambió a: $+18$ y el $+3i$ cambió a: $-3i$

← Resultado final, siguiendo las indicaciones del ejemplo 1, más los ajustes descritos en los dos pasos anteriores, de este problema.

$$3) (-17 + 2i) - (4 + 5i) + (12 - 9i)$$

$$= -17 + 2i - 4 - 5i + 12 - 9i$$

$$= (-17 - 4 + 12) + (2 - 5 - 9)i$$

$$= -9 - 12i$$

← Combinaciones de sumas y restas

Sacar los números de los paréntesis y realizar los cambios de signos necesarios, como el caso de $-(4 + 5i)$ que cambió a: $-4 - 5i$

← Agrupar la parte real y la parte imaginaria

← Respuesta final

Curiosidades matemáticas...



Los números negativos empezaron a usarse en la India en el siglo VII para indicar las deudas. Sin embargo, hasta el s. XVIII los números negativos no fueron **aceptados universalmente**.

TEMA #.4

MULTIPLICACIÓN DE NÚMEROS COMPLEJOS

Para multiplicar números complejos se dan los siguientes pasos:

- Primero, se aplica la propiedad distributiva.
- Luego, se resuelven las potencias de i .
- Finalmente, se reducen términos semejantes.

En la multiplicación de números complejos $(a + bi)$ y $(c + di)$ se tiene:

$$\begin{aligned} (a + bi)(c + di) &= ac + adi + bci + bdi^2 \\ &= ac + adi + bci + bd(-1) \quad \leftarrow \text{se reemplaza } i^2 \text{ por } -1 \\ &= (ac + bd) + (ad + bc)i \end{aligned}$$

Por lo tanto, $(a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$.

La multiplicación de números complejos cumple con las siguientes propiedades:

- Cerrada
- Conmutativa
- Asociativa
- Elemento neutro

- Distributiva

RECUERDA:

Regla de los signos para la multiplicación	<table border="1"> <tr> <td>+</td> <td>POR</td> <td>+</td> <td>=</td> <td>+</td> </tr> <tr> <td>+</td> <td>POR</td> <td>-</td> <td>=</td> <td>-</td> </tr> <tr> <td>-</td> <td>POR</td> <td>+</td> <td>=</td> <td>-</td> </tr> <tr> <td>-</td> <td>POR</td> <td>-</td> <td>=</td> <td>+</td> </tr> </table>	+	POR	+	=	+	+	POR	-	=	-	-	POR	+	=	-	-	POR	-	=	+
+	POR	+	=	+																	
+	POR	-	=	-																	
-	POR	+	=	-																	
-	POR	-	=	+																	

Ejemplos:

Resolver las siguientes multiplicaciones de números complejos:

$$1) (-19 - 5i) \cdot (3 - 11i)$$

$$= (-19 \cdot 3) + (19 \cdot -11i) + (-5i \cdot 3) + (-5i \cdot -11i) \quad \leftarrow \text{se aplica la propiedad distributiva}$$

$$= -57 - 209i - 15i + 55i^2 \quad \leftarrow \text{resultado de la multiplicación, aplicando la regla de los signos}$$

$$= -57 - 209i - 15i + 55(-1) \quad \leftarrow \text{reemplazamos } i^2 \text{ por } -1$$

$$= -57 - 209i - 15i - 55 \quad \leftarrow \text{multiplicamos } +55(-1)$$

$$= (-57 - 55) + (-209i - 15i) \quad \leftarrow \text{se agrupa la parte real y la parte imaginaria}$$

$$= -112 - 224i \quad \leftarrow \text{resultado al reducir términos semejantes}$$

$$2) (1 + 9i) \cdot (8 - 2i)$$

$$= (1 \cdot 8) + (1 \cdot -2i) + (9i \cdot 8) + (9i \cdot -2i) \quad \leftarrow \text{a partir de aquí se realizan todos los pasos del ejemplo anterior } \downarrow$$

$$= 8 - 2i + 72i - 18i^2$$

$$= 8 - 2i + 72i - 18(-1) \quad \leftarrow \text{multiplicamos } -18(-1)$$

$$= 8 - 2i + 72i + 18$$

$$= (8 + 18) + (-2i + 72i)$$

$$= 26 + 70i$$

Curiosidades matemáticas...



Hasta el siglo XVI, las **multiplicaciones** se consideraban tan difíciles que sólo se enseñaban en las **universidades**.

TEMA #.5

DIVISIÓN DE NÚMEROS COMPLEJOS

Para dividir dos números complejos se multiplican el dividendo y el divisor por el conjugado del divisor. Luego, se resuelven las operaciones indicadas.

En general, si $z, w \in \mathbb{C}$, tales que $z = a + bi$ y $w = c + di$, entonces:

$$\frac{z}{w} = \frac{z \cdot \bar{w}}{w \cdot \bar{w}} = \frac{(a + bi)(c - di)}{(c + di)(c - di)} = \frac{(ac + bd) + (bc - ad)i}{c^2 + d^2}$$

El inverso multiplicativo de todo número complejo z , es otro número complejo, que se simboliza z^{-1} , tal que: $z \cdot z^{-1} = z \cdot \frac{1}{z} = 1$

RECUERDA:

**Regla de los signos
para la división**

SIGNOS IGUALES	}	(+) : (+) = +
		(-) : (-) = +
SIGNOS DIFERENTES	}	(+) : (-) = -
		(-) : (+) = -

Ejemplos:

Resuelve las siguientes divisiones de números complejos:

$$\begin{aligned}
 1) \quad & \frac{3 + 5i}{1 - 2i} \\
 &= \frac{(3 + 5i)(1 + 2i)}{(1 - 2i)(1 + 2i)} && \leftarrow \text{se multiplica por el conjugado de } (1 - 2i) \\
 &= \frac{(3 \cdot 1) + (3 \cdot 2i) + (5i \cdot 1) + (5i \cdot 2i)}{(1 \cdot 1) + (1 \cdot 2i) + (-2i \cdot 1) + (-2i \cdot 2i)} && \leftarrow \text{se aplica la propiedad distributiva, en el} \\
 & && \text{numerador y en el denominador} \\
 &= \frac{3 + 6i + 5i + 10i^2}{1 + 2i - 2i - 4i^2} && \leftarrow \text{resultado de la multiplicación, aplicando la} \\
 & && \text{regla de los signos} \\
 &= \frac{3 + 6i + 5i + 10(-1)}{1 + \cancel{2i} - \cancel{2i} - 4(-1)} && \leftarrow \text{reemplazamos } i^2 \text{ por } -1 \\
 & && \leftarrow \text{simplificamos } +2i - 2i \text{ porque da cero} \\
 &= \frac{3 + 6i + 5i - 10}{1 + 4} && \leftarrow \text{multiplicamos } +10(-1) = -10
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{(3 - 10) + (6i + 5i)}{1 + 4} \\
 &= \frac{-7 + 11i}{5} \\
 &= \frac{-7}{5} + \frac{11i}{5}
 \end{aligned}$$

← multiplicamos $-4(-1) = +4$

← se agrupa la parte real y la parte imaginaria

← resultado al reducir términos semejantes

← se expresa el resultado en la forma $a + bi$

2) $(2 - 4i) \div (1 + i)$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{2 - 4i}{1 + i} \\
 &= \frac{(2 - 4i)(1 - i)}{(1 + i)(1 - i)} \\
 &= \frac{(2 \cdot 1) + (2 \cdot -i) + (-4i \cdot 1) + (-4i \cdot -i)}{(1 \cdot 1) + (1 \cdot -i) + (i \cdot 1) + (i \cdot -i)} \\
 &= \frac{2 - 2i - 4i + 4i^2}{1 - i + i - i^2} \\
 &= \frac{2 - 2i - 4i + 4(-1)}{1 - \cancel{i} + \cancel{i} - (-1)} \\
 &= \frac{2 - 2i - 4i - 4}{1 + 1} \\
 &= \frac{(2 - 4) + (-2i - 4i)}{1 + 1} \\
 &= \frac{-2 - 6i}{2} \\
 &= \frac{-2}{2} - \frac{6i}{2} \\
 &= -1 - 3i
 \end{aligned}$$

← se expresa la operación en forma fraccionaria

← a partir de aquí se realizan todos los pasos del ejemplo anterior ↓

← multiplicamos $+4(-1) = -4$

← multiplicamos $-(-1) = -1(-1) = +1$

← se expresa el resultado en la forma $a + bi$, pero podemos observar que este resultado se puede simplificar

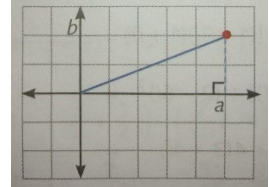
← resultado ya simplificado

TEMA #.6

NORMA DE UN NÚMERO COMPLEJO

La norma de un número complejo es la distancia del punto que representa al número complejo hasta el origen del plano complejo.

En la gráfica, se representa el número complejo $z = a + bi$ y la distancia del punto (a, b) al origen. Aplicando el teorema de Pitágoras, se tiene la expresión para determinar la norma de un número complejo.



Así, la norma de un número complejo $z = a + bi$, que se simboliza $|z|$, es:

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

RECUERDA:

**NÚMEROS NEGATIVOS ELEVADOS
A EXPONENTES PARES E IMPARES**

$$\begin{matrix} \text{PAR} & & \text{IMPAR} \\ (-) = + & + & (-) = - \end{matrix}$$

Ejemplos, para este tema:

a) $(-10)^2 = +100$

b) $(25)^2 = +625$

Ejemplos:

Hallar la norma de los siguientes números complejos:

1) $3 - 4i$

$$\begin{aligned} |3 - 4i| &= \sqrt{(3)^2 + (-4)^2} \\ &= \sqrt{9 + 16} \\ &= \sqrt{25} \\ &= 5 \end{aligned}$$

2) $-7 - 5i$

$$\begin{aligned} |-7 - 5i| &= \sqrt{(-7)^2 + (-5)^2} \\ &= \sqrt{49 + 25} \\ &= \sqrt{74} \\ &= 8.60 \end{aligned}$$



TALLERES SUMATIVOS 3, 4, 5, 6



Recuerde las indicaciones generales para cada Taller, descritas en la página 2 de esta guía didáctica, correspondiente al II Trimestre (2022).

Taller sumativo #.3

Nombre: _____ Grado: _____ Bachiller: _____
Fecha de entrega: **24-08-2022** Valor: 16 puntos Puntos obtenidos: _____

Resuelve las siguientes sumas y restas de números complejos:

- 1) $(7 - 6i) + (-2 + 4i)$ (procedimientos: 2 pts. y respuesta final 2 pts.)
- 2) $(-6 + 4i) - (12 + 7i)$
- 3) $(9 + 2i) + (9 - 2i)$
- 4) $(17 + i) - (12 - 4i) + (9 + 8i)$

Taller sumativo #.4

Nombre: _____ Grado: _____ Bachiller: _____
Fecha de entrega: **05-09-2022** Valor: 24 puntos Puntos obtenidos: _____

Resuelve las siguientes multiplicaciones de números complejos: (6 pts. c/u)

- a) $(1 - 3i) \cdot (2 + 5i)$
- b) $(1 + i)(-9 + 2i)$
- c) $(-8 + 3i) \cdot (11 + 7i)$
- d) $(6 + 6i)(6 - 6i)$

Nota: debe guiarse de los ejemplos resueltos, donde puede observar que estos problemas los resolverá en seis pasos, por tal motivo, cada paso equivale a 1 punto.

Taller sumativo #.5

Nombre: _____ Grado: _____ Bachiller: _____
Fecha de entrega: **15-09-2022** Valor: 30 puntos Puntos obtenidos: _____

Resuelve las siguientes divisiones de números complejos: (10 pts. c/u)

a) $(3 - 4i) \div (2 + 3i)$

b) $(11 - 4i) \div (-3 - 8i)$

c) $(-8 + 3i) \div (4 + i)$

Nota: debe guiarse de los ejemplos resueltos, en este caso empezaría como el ejemplo 2, porque debe acomodarlo primero en forma fraccionaria, estos problemas los resolverá en nueve pasos y en diez pasos si se encuentra algún problema que se le pueda simplificar el resultado final, tomando en cuenta esta posibilidad, cada paso equivale a 1 punto.

Taller sumativo #.6

Nombre: _____

Grado: _____

Bachiller: _____

Fecha de entrega: **27-09-2022**

Valor: 40 puntos

Puntos obtenidos: _____

Hallar la norma de los siguientes números complejos: (4 pts. c/u)

a) $6 + 4i$

b) $-12 - 5i$

c) $i + 1$

d) $-2i$

e) -1

f) i

g) $7i$

h) $5 - 3i$

i) $6 + 6i$

j) $1 - 25i$

Nota: debe guiarse de los ejemplos resueltos, estos problemas los resolverá en cuatro pasos, cada paso equivale a 1 punto. No olvide buscar con la calculadora el resultado de las raíces que no son exactas, como en el ejemplo 2, puede colocar hasta dos decimales.

"Nuestra recompensa se encuentra
en el esfuerzo y no en el resultado.
Un esfuerzo total es una victoria
completa."

- Mahatma Gandhi.