# REPÚBLICA DE PANAMÁ
# MINISTERIO DE EDUCACIÓN
# INSTITUTO PROFESIONAL Y TÉCNICO
# MÉXICO PANAMÁ

## MATERIAL DE ESTUDIO DE MATEMÁTICAS
## 11° GRADO PARA BACHILLER AGROPECUARIA

**PROFESORA:**
**DIOCELINDA SANJUR**

**ESTUDIANTE:** ____________________
**GRUPO: 11°D**

**AÑO ESCOLAR**
**2022.**

Fecha de entrega por el estudiante:
20 de septiembre de 2022
Información del docente:
Teléfono: 61594581
Correo: diocelindasanjur@gmail.com
Observación: Todo lo entregado debe estar desarrollado a mano con procedimiento completo.

Bendiciones apreciado estudiante, espero se encuentre bien.

El objetivo de este módulo guía es tratar de continuar con el proceso de aprendizaje que usted necesita a este nivel de educación, es también de conocimiento público la situación que se presenta en nuestro plantel que nos impide poder interactuar en el aula de clase, esperemos que el tiempo que tome mejorar esta condición no sea extenso y tengamos la oportunidad de poder encontrarnos en el aula.

Usted como estudiante responsable debe comprometerse con su aprendizaje y aunque el docente no esté presente físicamente, en este módulo esta mi información de contacto que ante cualquier duda o inquietud respecto a los temas atenderé las mismas, ya sea de manera virtual o presencial organizando de manera oportuna la misma atención.

Usted debe ser ordenado y puntual al momento de desarrollar y entregar las actividades de evaluación, que en este caso se presentaron siete, seis de las cuales son resolución de casos y un cuestionario, todo lo que va a entregar debe estar desarrollado a mano, ya sea a lápiz o bolígrafo, en páginas blancas o de rayas, todas engrapadas y con su debida información personal: nombre y apellido, cedula, nivel, grupo y fecha de entrega.

Usted como estudiante de 11° grado debe estar en la capacidad de poder desarrollarlo, este material fue elaborado de manera explicativa tratando de abarcar cada paso y procedimiento que considero puede parecer desconocido o complicado a su situación académica actual, con comentarios al lado del procedimiento, de igual manera usted puede ser participativo en su aprendizaje y poder investigar en los distintos canales y medios que se cuentan en la actualidad,

Esperando que las indicaciones estén claras y sea de gran ayuda el material proporcionado, queda de usted poder lograr los objetivos de este segundo trimestre del año escolar 2022.

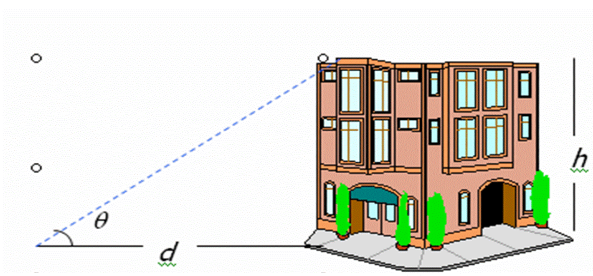
Este material abarca el área de Trigonometría y Álgebra correspondiente al plan de Matemáticas de 11mo grado de bachiller agropecuario, luego de desarrollarlo, usted debe haber adquirido las siguientes competencias:

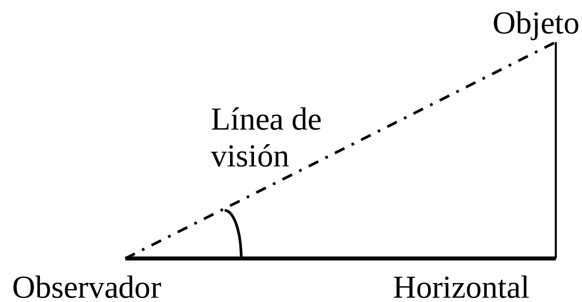
- ✓ Aplicar la trigonometría al resolver situaciones que se puedan presentar en específicos casos de la vida cotidiana.
- ✓ Desarrollar la capacidad de razonamiento lógico matemático mediante la demostración de identidades trigonométricas.
- ✓ Representar números complejos en sus diferentes formas y poder realizar operaciones aritméticas entre los mismos.

## *ÁNGULOS DE ELEVACIÓN Y DE DEPRESIÓN:*

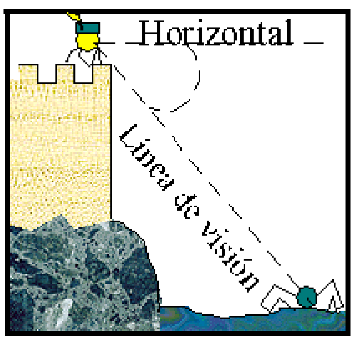
Los triángulos rectángulos generalmente se usan para calcular distancia en base a otras que pueden medirse fácilmente de manera directa. Para estos efectos se utiliza la línea de visión del observador como horizontal y se considera el ángulo que se forma de acuerdo a la posición del objeto. De acuerdo a la posición del objeto tenemos:

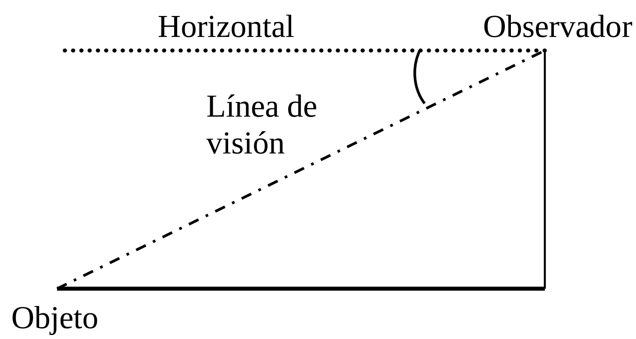
1. Ángulo de elevación: se llama ángulo de elevación al que forma la horizontal con la línea de visión, que se halla por encima de la horizontal, cuando el objeto se encuentra arriba del punto de observación.




2. Ángulo de depresión: se llama ángulo de depresión a que forma la horizontal con la línea de visión del objeto el cual se halla por debajo de la horizontal.

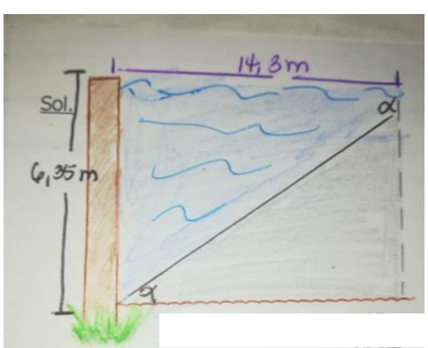



Estos dos conceptos se pueden aplicar en la solución de situaciones problemáticas, por **ejemplo**:

(1) Un muro vertical de 6,35 metros de alto sirve como represa de control de un canal cuya pendiente es constante. Cuando el agua ha alcanzado la altura máxima del muro; el espejo del agua tiene una longitud de 14,3 metros de largo. Calcúlese el ángulo de elevación del canal.

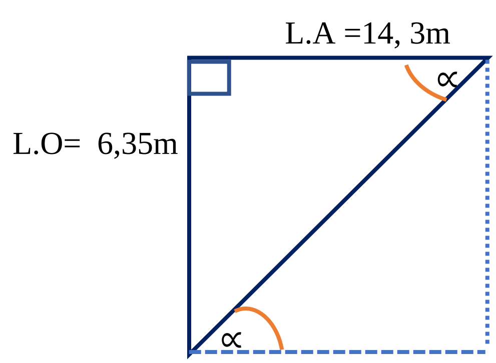
Sol.




$$\tan\alpha = \frac{6{,}35\ m}{14{,}3\ m}$$

$$\alpha = \tan^{-1}\frac{6{,}35}{14{,}3}$$

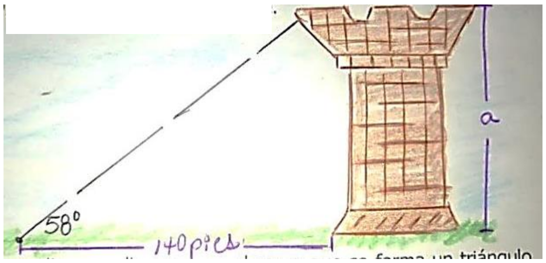
$$\alpha = 23°56'$$




**Resp.** *El ángulo de elevación del canal es de 23°56'*

**(2)** Desde un punto a nivel del suelo y a 140 pies de la base de una torre, el ángulo de visión a la parte más alta de la torre es de 58°. Encuentre la altura de la torre.

Sol.




Luego de realizar un diagrama se observa que se forma un triángulo rectángulo.
Aplicando funciones trigonométricas resulta:

$$\tan 58^{o} = \frac{a}{140\,pies}\left(\frac{cateto - opuesto}{cateto - adyacente}\right)$$

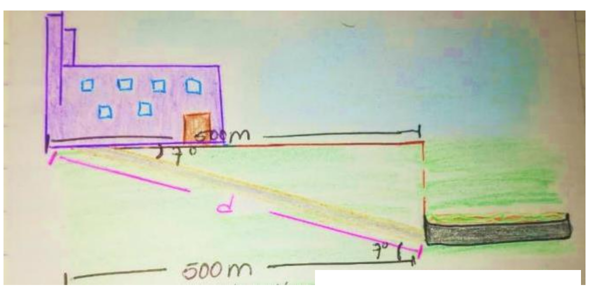
$$\Rightarrow a = (\tan 58^{o})(140\,pies)$$

$$a = 224{,}05\,pies$$

$\therefore$ La altura de la torre es de 224,05 pies.

**(3)** Una tubería de desagüe lleva los desechos desde una empacadora de productos hacia la laguna de oxidación que se encuentra a 500m de la empacadora. Determina la longitud de la tubería si necesita un ángulo de depresión de 7°.

Sol.




Tenemos un triángulo rectángulo, podemos señalar:

$$\cos 7^{o} = \frac{500m}{d}\left(\frac{cateto - opuesto}{hipotenusa}\right) \rightarrow \text{despejando para d}$$

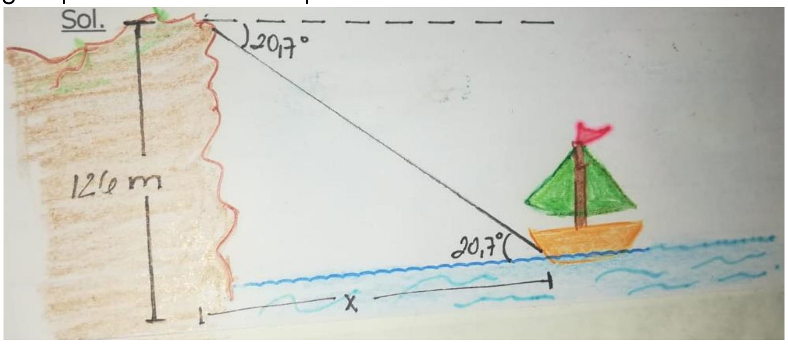
$$\Rightarrow d = \frac{500m}{\cos 7^{o}}$$

$$d = 503{,}8m$$

$\therefore$ La longitud de la tubería del desagüe es de 503,8m.

**(4)** Desde el borde de un acantilado de 126m de altura, el ángulo de visión hacia un velero es 20,7° ¿A qué distancia del pie del acantilado está dicho bote?

Sol.




Queda establecido un triángulo rectángulo, por tanto

$$\tan 20{,}7^{\circ} = \frac{126m}{x}\left(\frac{cateto - opuesto}{cateto - adyacente}\right)$$

$$\Rightarrow x = \frac{126m}{\tan 20{,}7^{\circ}} \rightarrow$$ despejando para x

$$x = 333{,}4m$$

$\therefore$ Luego la distancia del bote al pie del acantilado es de 333,4m aproximadamente.

## *Actividad para evaluación #1*

Resuelva los siguientes casos aplicando los ejemplos dados en el tema, debe presentar procedimiento completo y estar desarrollado a mano.

Debe presentar los datos y el triángulo que se forma para trabajar la situación.

1. Una mujer con una estatura de 1,64 m proyecta su sombra en el suelo. Si el ángulo de elevación que se forma desde la punta de la sombra hasta la mujer es de 42°, entonces calcule la longitud aproximada de la sombra. 10 puntos.

2. Desde la parte más alta de un faro con un ángulo de depresión de 54°, se observa un barco en el mar a una distancia de 117m de su base. Calcule la altura aproximada del faro. 10 puntos.

# *IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS*

En álgebra, las variables y las constantes representan generalmente números reales. De igual manera los valores de las funciones trigonométricas son también números reales.

*Definición: una identidad trigonométrica, es una igualdad entre expresiones que contienen funciones trigonométricas y es válida para todos los valores del ángulo en el que estén definidas y las operaciones aritméticas involucradas.*

## *CLASIFICACIÓN DE LAS IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS*

Identidades Recíprocas: se obtienen directamente de definiciones de las funciones trigonométricas.

$$sen\theta = \frac{1}{csc\theta} \qquad csc\theta = \frac{1}{sen\theta}$$
$$cos\theta = \frac{1}{sec\theta} \qquad sec\theta = \frac{1}{cos\theta}$$
$$tan\theta = \frac{1}{cot\theta} \qquad cot\theta = \frac{1}{tan\theta}$$

Pueden escribirse también de la siguiente manera:

$$sen\theta csc\theta = 1 \qquad cos\theta sec\theta = 1 \qquad tan\theta cot\theta = 1$$

Identidades de Cociente: se deducen directamente de las definiciones de las razones trigonométricas.

$$tan\theta = \frac{sen\theta}{cos\theta} \qquad cot\theta = \frac{cos\theta}{sen\theta}$$

Identidades Pitagóricas: las identidades pitagóricas guardan relación con el teorema de Pitágoras, por las relaciones que se determinan entre las funciones tenemos:

$$sen^2\theta + cos^2\theta = 1 \qquad sec^2\theta = 1 + tan^2\theta \qquad csc^2\theta = 1 + cot^2\theta$$

También se pueden utilizar en sus formas alternativas despejando alguno de sus términos, como se muestran a continuación.

$$sen^2\theta + cos^2\theta = 1 \qquad cos^2\theta = 1 - sen^2\theta \qquad sen^2\theta = 1 - cos^2\theta$$
$$sec^2\theta - tan^2\theta = 1 \qquad sec^2\theta = 1 + tan^2\theta \qquad tan^2\theta = sec^2\theta - 1$$
$$csc^2\theta - cot^2\theta = 1 \qquad csc^2\theta = 1 + cot^2\theta \qquad cot^2\theta = csc^2\theta - 1$$

## *DEMOSTRACIÓN DE LAS IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS*

Una identidad trigonométrica se verifica transformando alguno de sus miembros en el otro.

Aunque no existen métodos fijos para la demostración de las identidades trigonométricas, existen ciertos pasos que se pueden realizar y que ayudaran en mucho.

1. Conocer las relaciones fundamentales y reconocer formas alternativas.
2. Conocer los procedimientos de adición, sustracción, reducción y transformación de fracciones equivalentes.
3. Seleccionar el lado de la ecuación más complicada e intentar transformarlo en el otro miembro de la ecuación.
4. Usar sustituciones para cambiar todas las funciones trigonométricas en expresiones que contengan únicamente senos y cosenos, para luego simplificarlas.
5. En todos los pasos es necesario tener en cuenta el otro lado de la identidad.

## Ejemplo #1

Demostrar $sec\theta sen\theta = tan\theta$

$\frac{1}{cos\theta} \cdot sen\theta = tan\theta$ $\quad$ $se\ reemplaza\ sec\theta = \frac{1}{cos\theta}$

$\frac{sen\theta}{cos\theta} = tan\theta$ $\quad$ $utilizando\ identidad\ de\ cociente\ \frac{sen\theta}{cos\theta} = tan\theta$

$tan\theta = tan\theta$

## Ejemplo #2:

Demostrar $\frac{cos\theta + sen\theta}{sen\theta} = 1 + \frac{1}{tan\theta}$

$\frac{sen\theta}{sen\theta} + \frac{cos\theta}{sen\theta} = 1 + \frac{1}{tan\theta}$ *(escribimos la fracción del lado izquierdo como la suma de dos fracciones)*

$1 + \frac{cos\theta}{sen\theta} = 1 + \frac{1}{tan\theta}$ *(toda cantidad dividida por sí misma es igual a 1)*

$1 + cot\theta = 1 + \frac{1}{tan\theta}$ *(reemplazando la identidad de cociente $\boldsymbol{cot\theta} = \frac{\boldsymbol{cos\theta}}{\boldsymbol{sen\theta}}$)*

$1 + \frac{1}{tan\theta} = 1 + \frac{1}{tan\theta}$ *(reemplazando la identidad recíproca $cot\theta = \frac{1}{tan\theta}$*

## Ejemplo #3:

Demostrar $\frac{cos\theta}{cot\theta} = sen\theta$

$\frac{cos\theta}{\frac{cos\theta}{sen\theta}} = sen\theta$ *(reemplazando la identidad de cociente $cot\theta = \frac{cos\theta}{sen\theta}$)*

$\frac{cos\theta}{1} \times \frac{sen\theta}{cos\theta} = sen\theta$ *(división de fracciones, se invierte la fracción que está dividiendo y pasa a multiplicar)*

$\frac{\cancel{cos\theta}}{1} \times \frac{sen\theta}{\cancel{cos\theta}} = sen\theta$ *(se simplifican los cosenos)*

$sen\theta = sen\theta$

## Ejemplo #4

Demostrar $\frac{csc\theta}{cot\theta} = sec\theta$

$\frac{\frac{1}{sen\theta}}{\frac{cos\theta}{sen\theta}} = sec\theta$ *(reemplazamos la identidad recíproca $csc\theta = \frac{1}{sen\theta}$ y la identidad de cociente $cot\theta = \frac{cos\theta}{sen\theta}$)*

$\frac{1}{sen\theta} \times \frac{sen\theta}{cos\theta} = sec\theta$ *(división de fracciones, se invierte la fracción que está dividiendo y pasa a multiplicar)*

$\frac{1}{\cancel{sen\theta}} \times \frac{\cancel{sen\theta}}{cos\theta} = sec\theta$ *(se simplifican los senos)*

$\frac{1}{cos\theta} = sec\theta$

$sec\theta = sec\theta$ *(reemplazamos la identidad recíproca $sec\theta = \frac{1}{cos\theta}$)*

## Ejemplo #5

Demostrar $tan\theta cos\theta csc\theta = 1$

$\frac{sen\theta}{cos\theta} \times \frac{cos\theta}{1} \times \frac{1}{sen\theta} = 1$ *(se reemplaza las identidades $tan\theta = \frac{sen\theta}{cos\theta}$ y $csc\theta = \frac{1}{sen\theta}$, para que todas estén definidas en términos de senos y cosenos)*

$\frac{\cancel{sen\theta}}{\cancel{cos\theta}} \times \frac{\cancel{cos\theta}}{1} \times \frac{1}{\cancel{sen\theta}} = 1$ *(se simplifican términos semejantes)*

1=1

## Ejemplo #6

Demostrar $\frac{sec\theta}{tan\theta+cot\theta} = sen\theta$

$\frac{\frac{1}{cos\theta}}{\frac{sen\theta}{cos\theta}+\frac{cos\theta}{sen\theta}} = sen\theta$ *(reemplazamos las identidades $sec\theta = \frac{1}{cos\theta}$, $tan\theta = \frac{sen\theta}{cos\theta}$ y $cot\theta = \frac{cos\theta}{sen\theta}$ en el lado izquierdo de la identidad)*

$\frac{\frac{1}{cos\theta}}{\frac{sen^2\theta+cos^2\theta}{cos\theta sen\theta}} = sen\theta$ *(se suman las fracciones que están en el denominador)*

$\frac{\frac{1}{cos\theta}}{\frac{1}{cos\theta sen\theta}} = sen\theta$ *(se reemplaza la identidad pitagórica $sen^2\theta + cos^2\theta = 1$)*

$\frac{1}{cos\theta} \times \frac{cos\theta sen\theta}{1} = sen\theta$ *(se dividen las fracciones, se invierte la fracción que está en el denominador y pasa a multiplicar)*

$\frac{\cancel{1}}{\cancel{cos\theta}} \times \frac{\cancel{cos\theta}sen\theta}{\cancel{1}} = sen\theta$ *(se simplifica los términos semejantes)*

$sen\theta = sen\theta$

## *Actividad para evaluación #2*

Resuelva los siguientes casos aplicando los ejemplos dados en el tema, debe presentar procedimiento completo y estar desarrollado a mano

Primera parte: Escriba a mano todas las identidades trigonométricas en una ficha, elabórela en el material que tenga a su alcance, las mismas son para tener el material a mano en el momento que se estén haciendo las demostraciones (facilitará su trabajo). (10 puntos)

Segunda parte: Demuestre las siguientes identidades trigonométricas apoyándose de las fichas, debe presentar el procedimiento completo escrito a mano.

1. $cos\theta(tan\theta + cot\theta) = csc\theta$ 5 puntos
2. $(1 - sen\theta)(1 + sen\theta) = \frac{1}{1+tan^2\theta}$ 10 puntos
3. $cos^2\theta(1 + cot^2\theta) = cot^2\theta$ 5 puntos

# NÚMEROS COMPLEJOS.

De acuerdo con los conceptos de álgebra, se sabe que no todas las ecuaciones cuadráticas tienen una solución que esté comprendida dentro del ámbito de los números reales.

Por ejemplo, supóngase que se considera la ecuación $b^2 = -25$. No existe un número real que pueda sustituir a "**b**" en esta ecuación. Por consiguiente, no hay una raíz cuadrada real de $-25$; de manera similar puede decirse que los números negativos, no tienen raíz cuadrada real.

El conjunto que contiene todas las raíces cuadradas de números negativos se denota con la letra $\mathbb{C}$ y se denomina conjunto de los números complejos.

El conjunto de todos los números de la forma $a + bi$, donde $a, b \in \mathbb{R}$ $e$ $i = \sqrt{-1}$, se denomina el conjunto de los números complejos y se denota por la letra $\mathbb{C}$; esto es

$$\boxed{\mathbb{C} = \left\{a + \frac{bi}{a}, b \in R \ e \ i = \sqrt{-1}\right\}}$$

<u>**Definición**</u>: para el número complejo $a + bi$, el número **a** se denomina parte real y **b** se denomina parte imaginaria.

<u>**Ejemplos**</u>:

El número $4 + 5i$ es un número complejo cuya parte real es **4** y cuya parte imaginaria es **5**.

El número $-8 + (-3)i$ es un número complejo cuya parte real es **-8** y cuya parte imaginaria es **-3**.

Un número real es un número complejo cuya parte imaginaria es **0**; $a = a + 0i$, si **a** es un número real.

El número $0 + bi$ puede escribirse en forma más simple, como $bi$, esto es $bi = 0 + bi$, a este número se le llama número imaginario puro, o simplemente número imaginario.

<u>**Definición**</u>: si $p$ es un número positivo, entonces la raíz cuadrada principal de $-p$, representada por $\sqrt{-p}$, está definida por $\sqrt{-p} = i\sqrt{p}$.

Las dos raíces cuadradas de $-p$ se escriben como $\sqrt{-p} = -\sqrt{-p}$, o bien como $i\sqrt{p}$ ó $-i\sqrt{p}$. Entonces siempre es posible representar la raíz cuadrada de un número negativo como el producto de un número real y el número $i$.

<u>**Ejemplos**</u>:

$\sqrt{-2} = \sqrt{(-1)(2)}$ puede escribirse $\sqrt{-2} = \sqrt{-1}\sqrt{2} = \sqrt{2}i$

$\sqrt{-9} = \sqrt{(-1)(9)}$ puede escribirse $\sqrt{-9} = \sqrt{-1}\sqrt{9} = 3i$

$\sqrt{-7} = \sqrt{(-1)(7)}$ puede escribirse $\sqrt{-7} = \sqrt{-1}\sqrt{7} = \sqrt{7}i$

El conjunto de los **números imaginarios** es un subconjunto de los números complejos y se denota por la letra $\mathbb{I}$ definido por:

$$\boxed{\mathbb{I} = \left\{a + \frac{bi}{a}, b \in R, \ i^2 = -1, b \neq 0\right\}.}$$

A ciertos tipos particulares de números complejos se le dan nombres especiales, como sigue:

| | |
|---|---|
| Números reales | $a + 0i = a$ |
| Números imaginarios puros | $0 + bi = bi$ |
| Cero | $0 + 0i = 0$ |
| Unidad imaginaria | $1i = i$ |

<u>Ejemplos</u>:

- ✓ $-4 + 2i$ es un número imaginario.
- ✓ $-8i$ es un número imaginario puro.
- ✓ $6$ es un número complejo y puede escribirse $6 + 0i = 6$
- ✓ El número real $0$ es un número complejo y puede escribirse como $0 + 0i$.

<u>Definición</u>: dos números complejos son iguales si y solo si sus partes reales y partes imaginarias son iguales, es decir: $a + bi = c + di$ si y solo si $a = c$ y $b = d$.

<u>Ejemplo</u>:
$-4 + yi = x + 5i$ si y solo si $x = -4$ y $y = 5$.

<u>Definición</u>: dos números complejos son conjugados si y solamente si son iguales sus partes reales y los coeficientes de sus partes imaginarias difieren únicamente en su signo algebraico.

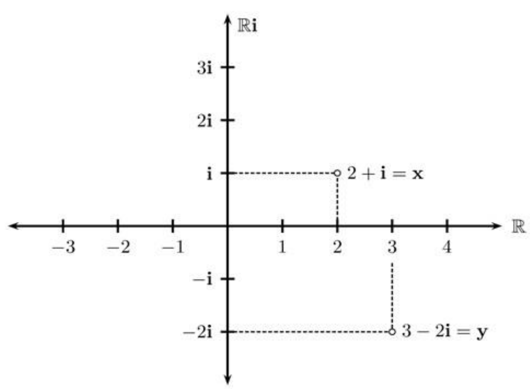
$a + bi$ es el conjugado de $a - bi$
$a - bi$ es el conjugado de $a + bi$.

<u>Ejemplos:</u>

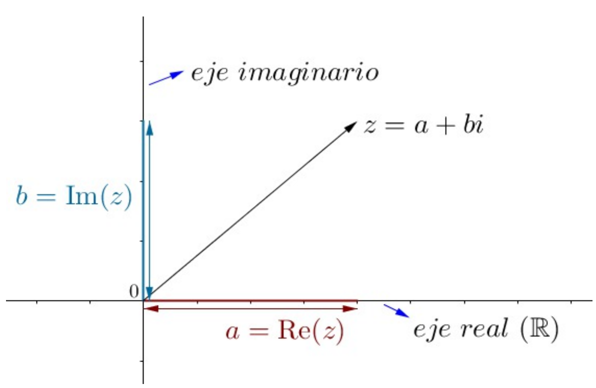
- ✓ $2 - 7i$ es el conjugado de $2 + 7i$
- ✓ $-8 - 3i$ es el conjugado de $-8 + 3i$

<u>Representación gráfica de los números complejos</u>.
Un plano coordenado con un número complejo asignado a cada punto es conocido como el plano complejo en lugar del plano $xy$.
El eje horizontal se denomina eje real y el eje vertical se denomina eje imaginario. El origen representa el elemento común $0 + 0i$.

El punto en que se tocan las coordenadas se denomina representación como punto.




El vector desde el origen "0" hacia el punto Z, se denomina representación como vector.



## *Actividad para evaluación #3*

Resuelva los siguientes casos aplicando los ejemplos dados en el tema, debe presentar procedimiento completo y estar desarrollado a mano

♣ Simplifique y exprese los siguientes números en términos de la unidad imaginaria:

1) $\sqrt{-32}$
2) $\sqrt{-25}$

♣ Represente los siguientes números complejos como punto:

1) $A = -3 + 2i$
2) $B = 2 + 4i$

♣ Represente los siguientes números complejos como vector:

1) $C = 3 + 7i$
2) $D = -8 + 9i$

♣ Encuentre el conjugado de los siguientes números complejos:

1) $2 - 3i$
2) $\frac{1}{5} + \frac{1}{2}i$
3) $5 + \sqrt{3}i$
4) $-3i$

### *OPERACIONES CON NÚMEROS COMPLEJOS.*

### *ADICIÓN Y SUSTRACCIÓN DE NÚMEROS COMPLEJOS*

La suma de dos números complejos $a + bi$ y $c + di$, se obtiene a partir de la siguiente ecuación: $(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$, o sea sumando ordenadamente partes reales con partes reales y partes imaginarias con partes imaginarias.

Ejemplos:

| | |
|---|---|
| $5\sqrt{-2} + \sqrt{-8}$<br>$\sqrt{-8}$ Se escribe como $\sqrt{4 \cdot -2}$, luego se extrae raíz cuadrada de 4 y queda $2\sqrt{2}i$<br>$= 5\sqrt{2}i + 2\sqrt{2}i$<br>$= [0 + 5\sqrt{2}i] + [0 + 2\sqrt{2}i]$se escriben en F. A<br>$= [0 + 0] + [5\sqrt{2}i + 2\sqrt{2}i]$se suman P.R y P.I<br>$= 0 + 7\sqrt{2}i$<br>F.A= forma algebraica<br>P.R= partes reales<br>P.I= partes imaginarias | $(2 - 2i) + (-5 + 8i)$<br>$= (2 + (-5)) + (-2i + 8i)$<br>Se multiplican los signos $+ \times - = -$<br>$= (2 - 5) + (-2 + 8)i$<br>$= -3 + (6)i$<br>$= -3 + 6i$ |

La diferencia de dos números complejos $a + bi$ y $c + di$, se determina de acuerdo a la expresión: $(a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i$, se restan partes reales y partes imaginarias correspondientemente.

Ejemplos:

| | |
|---|---|
| $\sqrt{-9} - \sqrt{-25}$<br>$= 3i - 5i$<br>$= (0 + 3i) - (0 + 5i)$<br>$= (0 - 0) + (3 - 5)i$<br>$= 0 + (-2)i$<br>$= -2i$ | $(7 + 8i) - (2 - 4i)$<br>$= (7 - 2) + (8 - (-4))i$<br>$= 5 + (8 + 4)i$<br>$= 5 + 12i$ |

## *MULTIPLICACIÓN Y DIVISIÓN DE NÚMEROS COMPLEJOS:*

El producto de dos números complejos $a+bi$ y $c+di$ está dado por la expresión:
$(a+bi)+(c+di)=(ac-bd)+(ad+bc)i.$

Ejemplo:

$$\begin{aligned}&(5+4i)(3-2i)\\&=[(5)(3)-(4)(-2)]+[(5)(-2)+(4)(3)]i\\&=[15-(-8)]+[-10+12]i\\&=(15+8)+(2)i\\&=23+2i\end{aligned}$$

El cociente de dos números complejos $a+bi$ y $c+di$, se obtiene multiplicando tanto el numerador y el denominador por el conjugado del denominador.

$$\frac{a+bi}{c+di}=\frac{a+bi}{c+di}\cdot\frac{c-di}{c-di}$$

Ejemplo:

$$\frac{2+3i}{1-4i}$$
$$=\frac{2+3i}{1-4i}\cdot\frac{1+4i}{1+4i}$$
$$=\frac{[(2)(1)-(3)(4)]+[(2)(4)+(3)(1)]i}{[(1)(1)-(-4)(4)]+[(1)(4)+(-4)(1)]i}$$
$$=\frac{[(2)(1)-(3)(4)]+[(2)(4)+(3)(1)]i}{[(1)-(-16)]+[(4)+(-4)]i}$$
$$=\frac{[(2)(1)-(3)(4)]+[(2)(4)+(3)(1)]i}{[(1+16)]+[(0)]i}$$
$$=\frac{(2-12)+(8+3)i}{1+16}$$
$$=\frac{-10+11i}{17}$$
$$=\frac{-10}{17}+\frac{11}{17}i$$

## *Actividad para evaluación #4*

Resuelva los siguientes casos aplicando los ejemplos dados en el tema, debe presentar procedimiento completo y estar desarrollado a mano

Resuelva las siguientes operaciones con números complejos, presentar su respuesta en la forma a+bi.

Valor: 5 puntos cada caso.

Suma y resta:

1) $(-12+i)+(3-7i)$
2) $(7+8i)-\ (2-4i)$
3) $(-4+2i)-(6+8i)+(13-2i)$

Valor: 10 puntos cada caso.

Multiplicación y división:

4) $(2+2i)(4\sqrt{3}-4i)$
5) $\frac{2-3i}{1-i}$

## VALOR ABSOLUTO Y ARGUMENTO DE UN NÚMERO COMPLEJO

Definición: el valor absoluto o módulo de un número complejo $a + bi$ es el número real no negativo $r = |a + bi| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Definición: el argumento de un número complejo $a + bi$ diferente de cero es el ángulo $\theta$ , tal que $0° \leq \theta \leq 360°$.

$$cos\theta = \frac{a}{r} \quad y \quad sen\theta = \frac{b}{r}.$$

Para obtener el argumento de un número complejo $a + bi$, diferente de cero, se puede utilizar la función $tan\theta = \frac{b}{a}$ de donde $\theta = tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)$, además de considerar el cuadrante en el que se encuentra la gráfica.

Ejemplo:

- Hallar el valor absoluto y el argumento de $3 + 2i$

$|3 + 2i| \qquad a = 3 \qquad b = 2$

$r = \sqrt{(3)^2 + (2)^2}$ $\qquad \theta = tan^{-1}\left(\frac{2}{3}\right)$

$r = \sqrt{9 + 4}$ $\qquad \theta = tan^{-1}(0{,}6666666667)$

$r = \sqrt{13}$ **Valor absoluto.** $\qquad \theta = 33°41'$ **Argumento**

Este número estará ubicado en el primer cuadrante.

- Hallar el valor absoluto y el argumento de $-4 + 2i$

$|-4 + 2i| \qquad a = -4 \qquad b = 2$

$r = \sqrt{(-4)^2 + (2)^2}$ $\qquad \theta = tan^{-1}\left(\frac{2}{-4}\right)$

$r = \sqrt{16 + 4}$ $\qquad \theta = tan^{-1}(-0{,}5)$

$r = \sqrt{20}$ $\qquad \theta_R = -26°33'$

$r = \sqrt{4 \cdot 5}$ $\qquad \theta = 180° - 26°33'$

$r = 2\sqrt{5}$ **Valor absoluto.** $\qquad \theta = 153°27'$ **Argumento**

Este número estará ubicado en el segundo cuadrante.

## FORMA TRIGONOMÉTRICA Y ALGEBRAICA DE UN NÚMERO COMPLEJO

Los números complejos también se pueden representar en términos de su módulo y argumento. Sea $a + bi$ un número complejo diferente de cero, cuyo módulo es $r = |a + bi|$ y su argumento es $\theta$. El ángulo $\theta$ llamado amplitud del número complejo, se escoge generalmente, como el ángulo positivo menor, cuyo $tan\theta = \frac{b}{a}$.

De acuerdo a la definición del argumento de un número complejo, se tiene que:

$$\boxed{cos\theta = \frac{a}{r} \quad y \quad sen\theta = \frac{b}{r}}$$

al momento de despejar en cada ecuación $a\ y\ b$ tenemos:

$$\boxed{rcos\theta = a \quad y \quad rsen\theta = b.}$$

Luego por sustitución, $a + bi = rcos\theta + (rsen\theta)i$

Al factorizar **r**, $\qquad a + bi = r(cos\theta + isen\theta)$

La expresión $r(cos\theta + \ isen\theta)$ se denomina forma trigonométrica o polar, y suele abreviarse muy a menudo como $rcis\theta$, quedando $r(cos\theta + \ isen\theta) = rcis\theta$.
La forma algebraica o rectangular de un número complejo a partir de su forma trigonométrica o polar, se encuentra reemplazando el módulo y argumento de dicho número, en las siguientes ecuaciones: $a = rcos\theta \quad y \quad b = rsen\theta$, luego se escriben en el orden correspondiente $a + bi$.

**Ejemplos:**

- -4 + $4i$, para escribirlo en la forma polar debemos calcular el módulo y el argumento

  $= \sqrt{(-4)^2 + (4)^2} \qquad \theta = tan^{-1}\left(\frac{4}{-4}\right)$

  $r = \sqrt{16+16} \qquad \theta = tan^{-1}(-1)$

  $r = \sqrt{32} \qquad \theta = -45°$

  $r = 4\sqrt{2} \qquad \theta = 180° - 45°$ porque -4 + $4i$ está en el II cuadrante.

  $\theta = 135°$

  De donde, -4 + $4i = 4\sqrt{2}\,(cos\ 135° + i\ sen\ 135°\,) = 4\sqrt{2}\ cis\ 135°$

- $4\ cis\ 172°$, para escribirlo en la forma algebraica buscamos módulo y argumento

  $$r = 4\ y\ \theta = 172°$$

  $$cos\ 172° = \ -0.9903, \quad sen\ 172° = \ 0{,}1392$$

  Entonces

  $$4\ cis\ 172° = 4(-0{,}9903 + i\ 0{,}1392) = \ -3{,}96 + 0{,}56i$$

- $-5i$, la forma algebraica completa sería 0 – 5i

  $$r = \sqrt{(-5)^2} = \ \sqrt{25} = 5$$

  $$\theta = 270°$$

  Podemos decir entonces, $-5i = 5\ (cos\ 270° + i\ sen\ 270°) = \ 5\ cis\ 270°$

- $\sqrt{6}\ cis\ \frac{2\pi}{3} \qquad \pi = 180°$

  $r = \ \sqrt{6}$ y $\theta = \frac{2\pi}{3} = 120°$

  $$a = \ \sqrt{6}\ cos\ 120° = \ \sqrt{6}\ \left(-\frac{1}{2}\right) = \ -\frac{\sqrt{6}}{2}$$

  $$b = \ \sqrt{6}\ sen\ 120° = \sqrt{6}\ \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \ \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

  Entonces, $\sqrt{6}\ cis\ \frac{2\pi}{3} = \ -\frac{\sqrt{6}}{2} + \ \frac{3\sqrt{2}}{2}i$

*Actividad para evaluación #5*

Resuelva los siguientes casos aplicando los ejemplos dados en el tema, debe presentar procedimiento completo y estar desarrollado a mano

1. Determina el valor del valor absoluto y el argumento de los siguientes números complejos, recuerde indicar en que cuadrante se encuentran ubicados los mismos:
   - 3 – 4i
   - 7+ √15 i
2. Exprese los siguientes números complejos en forma polar:
   - 5i
   - -1+i$\sqrt{2}$
   - 2-2i
3. Escriba los siguientes números complejos en su forma algebraica:
   - 5(cos180°+isen180°)
   - 3,5cis90°
   - 4cis270°

## *MULTIPLICACIÓN Y DIVISIÓN DE DOS NÚMEROS COMPLEJOS EXPRESADOS EN SU FORMA POLAR.*

**El producto o multiplicación** de dos números complejos expresados en su forma polar, da como resultado un nuevo número complejo expresado en forma polar, cuyo módulo resulta de multiplicar los módulos de ambos números y el argumento resulta de sumar los argumentos de ambos números.

**Ejemplos:**

- ✓ $(6cis45°)(8cis30°)$

$$= (6)(8)\ cis\ (45° + 30°)$$
$$= 48\ cis\ 75°$$

- ✓ $\left(5cis\frac{\pi}{4}\right)\left(4cis\frac{\pi}{2}\right)$ $\quad \frac{\pi}{4} = 45° \quad \frac{\pi}{2} = 90°$

$$= (5)(4)cis\ (45° + 90°)$$
$$= 20\ cis\ 135°$$

- ✓ $(4cis200°)\left(\frac{3}{8}cis190°\right)$ * 390° - 360° = 30°

$$= (4)\left(\frac{3}{8}\right)cis\ (200° + 190°)$$
$$= \frac{3}{2}\ cis\ 390° \ *$$
$$= \frac{3}{2}\ cis\ 30°$$

**El cociente o división** de dos números complejos expresados en su forma polar, da como resultado un nuevo número complejo expresado en forma polar, cuyo módulo resulta de dividir los módulos de ambos números y el argumento resulta de restar los argumentos de ambos números.

**Ejemplos:**

- ~ $\frac{12cis12°}{3cis250°}$

$$= \frac{12}{3}\ cis\ (12° - 250°)$$
$$= 4\ cis - 238° = 4\ cis\ 122°$$

- ~ $(4cis190°) \div (2cis70°)$

$$= \frac{4}{2}\ \ cis\ (190° - 70°)$$
$$= 2\ cis\ 120°$$

- ~ $\frac{(25cis100°)(2cis80°)}{(4cis25°)(10cis30°)}$

$$= \frac{(25)(2)\ cis\ (100° + 80°)}{(4)(10)\ cis\ (25° + 30°)}$$
$$= \frac{50\ cis\ 180°}{40\ cis\ 55°}$$
$$= \frac{50}{40}\ \ cis\ (180° - 55°)$$
$$= \frac{5}{4}\ \ cis\ 125°$$

*** Observación:**
Si en el producto el argumento da mayor de 360°, buscamos el ángulo coterminal menor, restándole 360°. Si en el cociente el argumento da un ángulo negativo buscamos el ángulo positivo sumando 360°.

## *Actividad para evaluación #6*

Resuelva los siguientes casos aplicando los ejemplos dados en el tema, debe presentar procedimiento completo y estar desarrollado a mano

Encuentre el producto de los siguientes números complejos en su forma polar:

- ♣ $\left(12\ cis\ \frac{\pi}{2}\right)\left(8{,}0\ cis\ \frac{\pi}{4}\right)$
- ♣ $(3\ cis\ 70°)(cis\ 240°)$

Determine el cociente de los siguientes números complejos en la forma polar

- ♣ $(7{,}3\ cis\ 73{,}0°) \div (8{,}7\ cis\ 97{,}9°)$
- ♣ $\frac{4\ cis\ 190°}{2\ cis\ 70°}$
- ♣ $(8\ cis\ 150°)\ \div (2\ cis\ 30°)$

## *Cuestionario de tema Números complejos.*

Responda las siguientes preguntas con el material proporcionado.

Valor 2 puntos cada respuesta.

1. ¿Cuál es el conjunto de los números complejos?
2. ¿Cómo se denota el conjunto de los números complejos?
3. ¿Cuáles son las partes de un número complejo?
4. ¿Qué es un número real?
5. ¿Cuál es la forma de un número complejo?
6. ¿Qué es el conjunto de los números imaginarios?
7. ¿Qué es un número imaginario puro?
8. ¿Cuándo dos números complejos son iguales?
9. ¿Cuándo dos números complejos son conjugados?
10. ¿Qué es el plano complejo?