REPÚBLICA DE PANAMÁ
GOBIERNO NACIONAL
MINISTERIO DE EDUCACIÓN

EL MUNDO MARAVILLOSO DE LA MATEMÁTICA

12°

Talleres para Alumnos

REPÚBLICA DE PANAMÁ
GOBIERNO NACIONAL

MINISTERIO DE EDUCACIÓN

Autoridades

S. E. Maruja Gorday de Villalobos
Ministra de Educación
S. E. Zonia Gallardo de Smith
Viceministra Académica
S. E. José Pío Castillero
Viceministro Administrativo
S. E. Ricardo Sánchez
Viceministro de Infraestructura

Equipo Directivo

Dirección General

Guillermo Alegría
Director General de Educación

Victoria Tello
Subdirectora General de Educación Académica

Anayka De La Espada
Subdirectora General Técnico Administrativa

Directores Nacionales Académicos

Isis Núñez
Directora Nacional de Educación Media Académica

Carlos González
Director Nacional de Educación Media Profesional y Técnica

Agnes de Cotes
Directora Nacional de Jóvenes y Adultos

Carmen Reyes
Directora Nacional de Currículo y Tecnología Educativa

REPÚBLICA DE PANAMÁ
GOBIERNO NACIONAL

MINISTERIO DE EDUCACIÓN

Dirección Nacional de Educación Media Académica
Dirección Nacional de Educación Media Profesional y Técnica
Dirección Nacional de Jóvenes y Adultos

Estudiante: ______________________________

Centro Educativo: ______________________________

Medidas de prevención por el COVID - 19

Equipo Coordinador

Isis Núñez

Directora Nacional de Educación Media Académica

Eduvigis Mercedes Rodríguez I.
Coordinadora General

Lenin Hernández
Apoyo Técnico Curricular 10°

Emiliano González
Apoyo Técnico Curricular 11°

Lysseth A. Pittí
Apoyo Técnico Curricular 12°

Aracelly Agudo
Diseño de Portadas

Docentes Especialistas de Matemática

Décimo Grado

- **Cristina González Guerra**
Región de Panamá Centro
Instituto Comercial Panamá
- **Cynthia Candanedo**
Región de la Comarca Ngäbe Buglé
I.P. T. Sitio Prado
- **Elsa Eugenia González Serrano**
Región de Chiriquí
- Colegio Comercial Tolé
Nilka O. Solís Samudio
Región de Chiriquí
- Colegio Francisco Morazán

Undécimo Grado

- **Johanna E. Castillo M.**
Región de Veraguas
Colegio José Bonifacio Alvarado
- **Juan Manuel Quirós**
Región de Panamá Oeste
Escuela Stella Sierra
- **Janeth Aparicio de Higuera**
Región de Coclé
I. P.T. Industrial de Aguadulce
- **Dalba Janet Morán Arias**
Región de Coclé
Instituto Carmen Conté Lombardo
- **Lorenzo Caballero Vigil**
Región de Veraguas
C.E.B.G. José Santos Puga

Colaboradores y correctores

Aritmética

- Yosari Alvarado
- Arnulfo Ariel Ríos Aparicio
- Fernando Domínguez
- Rosaura Pérez Araúz

Algebra

- Yassir E. Bruce M.
- Edilberto José Adames Pineda
- Migdalia Lineth Domínguez

Geometría

- Maricela Muñoz
- Daniel Alvarado Moreno

Trigonometría y cálculo

- Américo Rodríguez

Duodécimo Grado

- **Reyna Jaramillo**
Región de Veraguas
Instituto Urracá
- **Joel Almanza**
Región de Herrera
C. E. B. G. De Parita
- **Anastasio Serrano Abrego**
Región de Bocas del Toro
C.E.B.G. Bilingüe Guabito
- **Neuza Delgado de Pinzón**
Región de Coclé
C. E. Bilingüe Federico Zúñiga Feliú
- **Jane Cedeño**
Región de Chiriquí
Instituto David
- **José A. Echeverría**
Región de Chiriquí
Benigno Tomas Argote
- **Abdul Troncoso**
Región de Chiriquí
I.P.T Diurno de David
- **Dalys Villarreal**
Región de Coclé
I.P. T. Industrial de Aguadulce
- **Nurkia Díaz de Mendieta**
Región de Panamá Centro
I.P.T. Don Bosco

Mensaje para los estudiantes

Apreciado estudiante:

Pensando en ti, para que puedas lograr tus sueños, queremos que sigas aprendiendo. Ahora que estás en casa, aprovecha y comparte con tu familia, escribe historias con tus personajes favoritos, lee todo lo que puedas, imagina un mundo mejor, cuida a los animales, siembra un árbol; en fin, aprovecha el tiempo y trata de ser muy feliz.

¡Te extrañamos! pronto nos veremos, recuerda que es importante que sigas aprendiendo. Para lograrlo, debes desarrollar cada una de las asignaciones y actividades, que han sido elaboradas, especialmente para ti. Trata de hacerlo de forma independiente, si tienes quien te ayude, ¡fabuloso! Pero recuerda, tienes una oportunidad valiosa para que, a través de los libros, puedas conocer el mundo, aprender la magia de los números, viajar con la lectura, analizar la importancia del agua, los beneficios de los árboles, el funcionamiento de nuestro cuerpo y los cuidados que debemos darle.

Eres de gran valor para tu familia y nuestro país, por eso debes cuidar tu salud y seguir las recomendaciones para la prevención de enfermedades.

Pronto volveremos a la escuela y queremos que nos digas cuanto aprendiste, el tema más interesante que desarrollaste, la lectura que más te gustó, lo divertido que fue para ti, aprender en casa. ¡Nos veremos pronto, todo va a salir bien!

Maruja Gorday de Villalobos

Ministra de Educación

Contenido

UNIDAD 1: ÁLGEBRA

OBJETIVOS DE APRENDIZAJE

- Resuelve situaciones reales que involucren diferentes tipos de inecuaciones, aplicando sus propiedades y procesos de solución.

INDICADORES DE LOGRO

- Utiliza con precisión la simbología de relaciones de orden y la notación de los intervalos.
- Aplica correctamente las propiedades de las desigualdades y los procesos de solución.
- Resuelve con claridad, problemas reales que involucren la aplicación de las inecuaciones.

UNIDAD 2: CÁLCULO DIFERENCIAL

OBJETIVOS DE APRENDIZAJE

- Identifica diferentes tipos de funciones, mediante sus notaciones y gráficas.
- Determina dominio y codominio de funciones reales, utilizando sus procesos y gráficas.
- Resuelve operaciones con funciones y determina la compuesta de funciones.
- Aplica la derivada de funciones para resolver situaciones reales, utilizando los teoremas.
- Verifica la existencia del límite y continuidad de una función.
- Aplica la derivada de funciones para resolver situaciones reales, utilizando los teoremas.

INDICADORES DE LOGRO

- Determina si una curva en el plano cartesiano corresponde a una función o no, aplicando adecuadamente la definición y el criterio de la recta vertical.
- Realiza con precisión y creatividad la gráfica de una función determinando el dominio y codominio.
- Resuelve situaciones del contexto aplicando los procesos de las funciones reales, correctamente.
- Identifica con precisión la existencia del límite de funciones mediante su interpretación gráfica.
- Aplica los teoremas de límite de funciones, mostrando destrezas y responsabilidad en la solución de ejercicios.
- Determina, en equipo colaborativo, la continuidad de una función aplicando la definición
- Explica con seguridad y coherencia el concepto de derivada de una función.
- Calcula la derivada de funciones algebraicas y trascendentes aplicando los teoremas, en grupos colaborativos.

UNIDAD 3: ESTADÍSTICA Y PROBABILIDAD

OBJETIVOS DE APRENDIZAJE

- Aplica el análisis combinatorio en la solución de situaciones del contexto.

INDICADORES DE LOGRO

- Resuelve situaciones cotidianas aplicando el Principio Fundamental del Conteo, con seguridad.
- Construye con precisión y coherencia un diagrama de árbol de una situación dada.
- Resuelve situaciones reales donde se aplica permutaciones o combinaciones.
- Determina la probabilidad de ocurrencia de un evento aplicando correctamente los procesos.

COMPETENCIAS MATEMÁTICAS

- **Aprender a aprender:** Muestra capacidad permanente para obtener y aplicar nuevos conocimientos y adquirir destrezas.
  Desarrolla la habilidad para utilizar y relacionar situaciones reales que involucren diferentes tipos de inecuaciones, funciones y la estocástica para producir e interpretar distintos tipos de información.
- **Matemáticas:** Resuelve los conceptos matemáticos en la solución de situaciones de su entorno.
- **Tratamiento de la información y competencia digital:** Participa en proyectos innovadores mediante la aplicación de estrategias diversas con miras a la solución de situaciones de su entorno.
- **Autonomía e iniciativa personal:** Manifiesta actitud perseverante hasta lograr las metas que se ha propuesto.

RECURSOS DIDÁCTICOS

- Lápiz, borrador cuaderno, regla para imprimir en anexos.
- Calculadora
- Microsoft Office-Excel

PRESENTACIÓN

El COVID-19 nos ha cambiado la vida, ahora debemos estar en casa y no en las escuelas como estamos acostumbrados. De esta manera evitamos un mayor contagio en las comunidades, en nuestras familias y amigos. Para que continúe estudiando en su casa, un grupo de docentes de matemática y los egresados de la Maestría en Didáctica de la Matemática, dictada por la Universidad Autónoma de Barcelona; Auspiciada por la SENACYT, hemos elaborado esta guía de aprendizaje con el fin de que nuestros estudiantes sean competentes y descubran la importancia de la matemática y sus aplicaciones en la naturaleza, en la vida diaria y en el mundo. El propósito fundamental es mejorar la calidad en los procesos de enseñanza.

Las temáticas presentadas corresponden al currículo priorizado de duodécimo grado de la educación media, del Bachiller en Ciencias, Humanidades, Informática, Agropecuaria, Servicio y Gestión Institucional, Marítima, Industriales. En los talleres que hemos seleccionado está considerada la problemática que existe en esta área y el papel fundamental de la visualización en el desarrollo de problemas matemáticos.

La relación con la naturaleza, el contexto y la relación con otras ciencias, permiten que el estudiante desarrolle la visualización explorando y observando lo que sucede con los objetos que existen en su medio, que se valore a sí mismo y aborde problemas y retos teniendo en cuenta los objetivos que persigue e integre los conocimientos tecnológicos, humanísticos y científicos que faciliten el establecimiento de relaciones entre los diferentes campos del saber humano.

A continuación, presentamos los conceptos básicos mediante una secuencia de actividades (Introducción-I, Temas-T, Autoevaluación-A); que corresponden al año lectivo 2020, **las mismas pueden ser desarrolladas en este cuadernillo o en su portafolio de actividades.**

Bienvenidos al "*Mundo Maravilloso de la Matemática".*
#aprendoencasa, ¡Juntos lo lograremos!

Docentes del Mundo Maravilloso de la Matemática.

1 | ÁLGEBRA

TEMA 1. INTERVALOS

Antes de iniciar el tema de las desigualdades debemos familiarizarnos con el manejo de los intervalos y repasar las relaciones de orden en los números reales.

¡COMENCEMOS! ___ .

- Orden en los números reales

SÍMBOLOS A UTILIZAR

<	**Menor que**
>	**Mayor que**
=	**Igual que**

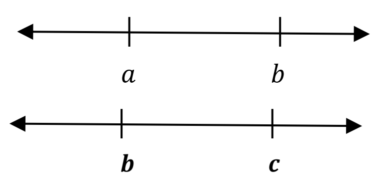
Los números reales son magnitudes ordenadas. Un número a es mayor que un número b si en la recta numérica a está a la derecha de b. Lo cual se puede escribir de la siguiente manera:

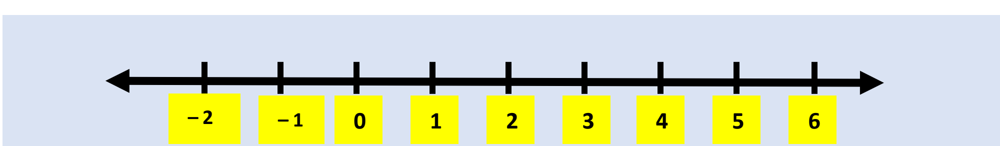
$a > b$ (a es mayor que b) , o lo que es igual $b < a$ (b es menor que a).

Los símbolos de desigualdad $<$ y $>$ tienen una interpretación geométrica muy clara sobre la recta numérica.

Si $a < b$, entonces a está a la izquierda de b.

Si $c > b$, entonces c está a la derecha de b.





Ejemplo 1:

a) 4 > 2 se lee: 4 es mayor que 2 (4 se encuentra a la derecha del 2)

b) 3 < 5 se lee: 3 es menor que 5 (3 se encuentra a la izquierda de 5)

Note que:

En muchas ocasiones se utiliza el símbolo $\geq$, $\leq$, estos símbolos describen lo siguiente:

- $\boldsymbol{a \geq b}$ Indica que: $\boldsymbol{a}$ **es mayor que** $\boldsymbol{b}$ o $\boldsymbol{a}$ **es igual a** $\boldsymbol{b}$, en forma más simple se dice que, $\boldsymbol{a}$ **es mayor o igual que** $\boldsymbol{b}$**.**

- $\boldsymbol{a \leq b}$ Indica que: $\boldsymbol{a}$ **es menor que** $\boldsymbol{b}$ o $\boldsymbol{a}$ **es igual a** $\boldsymbol{b}$, en forma más simple se dice que, $\boldsymbol{a}$ **es menor o igual que** $\boldsymbol{b}$**.**

Ejemplo 2:

- $x \leq 8$ se lee: x es menor o igual a 8

Donde, x representa la palabra números, lo que nos indica esta expresión es números que cumplan la condición de ser menor o igual al número 8.

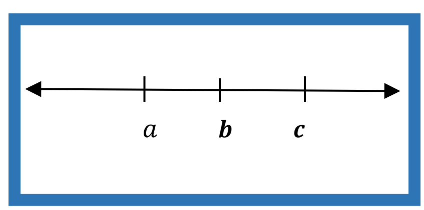
Las desigualdades que no incluyen el símbolo igual se denominan **estrictas**, y las que lo incluyen se denominan **no estrictas**.

- Propiedad axioma de la tricotomía

Sean a y b dos números reales entre ellos solo se cumple una y solo una de las siguientes relaciones:

$$a < b$$
$$a = b$$
$$a > b$$

Un punto b estará entre a y c, si y solo si $a < b$ y $b < c$; cuando se presente este caso, se pueden definir estas dos relaciones mediante una sola expresión utilizando una **doble desigualdad** de la siguiente manera: $a < b < c$, con lo que se indica que **"$\boldsymbol{b}$ es mayor que $\boldsymbol{a}$ y a la vez $\boldsymbol{b}$ es menor que $\boldsymbol{c}$".**



Lo anterior define un intervalo de recta en la cual b puede adquirir distintos valores que estén entre a y c. ***A los números a y c se les llama extremos del intervalo.***

- Intervalos

¿Cuándo utilizamos intervalos?

A menudo utilizas intervalos, en muchas situaciones y actividades de tu contexto, por ejemplo:

Cuando indicas la edad de los ciudadanos que pueden votar en las elecciones presidenciales.	Cuando calculas un rango para estimar el costo de unas zapatillas que deseas comprar: Cuesta entre B/.40.00 a B/. 50.00.	Para indicar el promedio de las calificaciones de un estudiante para estar en el cuadro de honor de tu colegio.

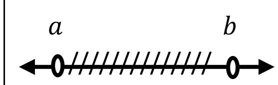
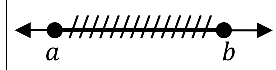
Un intervalo se define como el subconjunto de números reales que queda delimitado en una relación de orden, por ejemplo: el intervalo formado por todos los números reales mayores que el número cero y menores que el número dos, los números que delimitan el intervalo se les llama **extremos del intervalo**.

En otras palabras, sean a y b dos números reales ($\mathbb{R}$) con a menor que b, un intervalo es el subconjunto de números reales que están entre a y b; donde a los números a y b se les llama extremos del intervalo.

La siguiente tabla presenta las diferentes formas de expresar un intervalo; esta primera tabla presenta intervalos que están delimitado en ambos extremos, tienen un punto de inicio a y otro punto de fin b, los cuales se pueden incluir o no dependiendo de lo que se quiera expresar por medio de él, el punto $\boldsymbol{a}$ se denominará extremo inferior o izquierdo del intervalo, siendo este el inicio del intervalo, el punto b será el extremo superior o derecho del intervalo, el cual es el final del intervalo.

Recuerde: El intervalo incluye a todos los números que están entre a y b.

Tabla N°1. Clasificación de intervalos según notación de intervalo, conjunto, desigualdad y gráfica.

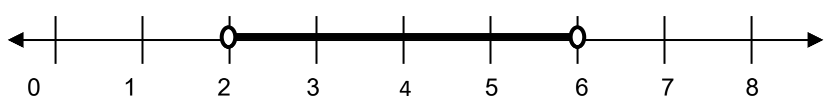
TIPO DE INTERVALO	NOTACIÓN DE INTERVALO	NOTACIÓN DE CONJUNTO	NOTACIÓN DE DESIGUALDAD	NOTACIÓN GRÁFICA
Abierto (No incluye ambos extremos)	(a, b)	$\{x \in \mathbb{R} \,/\, a < x < b\}$	$a < x < b$	
Cerrado (Incluye ambos extremos)	$[a, b]$	$\{x \in \mathbb{R} \,/\, a \leq x \leq b\}$	$a \leq x \leq b$	
Semi abierto por la derecha (De los extremos solo se incluye el izquierdo)	$[a\ ,\ b\ )$	$\{x \in \mathbb{R} \,/\, a \leq x < b\ \}$	$a \leq x < b$	
Semi abierto por la izquierda (De los extremos solo se incluye el derecho)	$(a,b\ ]$	$\{x \in \mathbb{R} \,/ a < x \leq b\}$	$a < x \leq b$	

Ejemplo 3:

Represente de intervalos en notación de desigualdad y notación gráfica

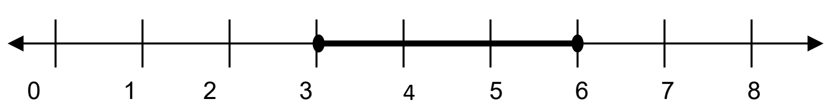
a) **Intervalo Abierto** (incluye a todos los números entre 2 y 6, no incluye al 2 ni al 6)

$2 < x < 6$



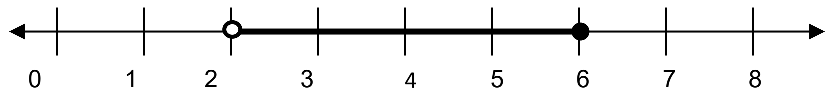
b) **Intervalo cerrado** (incluye a todos los números entre 3 y 6, incluye además al 3 y al 6)

$3 \leq x \leq 6$



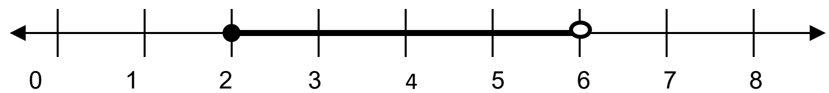
c) **Intervalo semi abierto por la izquierda** (iincluye a todos los números entre 2 y 6, no incluye al 2 si incluye al 6)

$2 < x \leq 6$



1) **Intervalo semi abierto por la derecha** (incluye a todos los números entre 2 y 6, incluye al 2 y no incluye al 6)

$2 \leq x < 6$



También hay intervalos que están delimitados solo por uno de sus extremos, los cuales son llamados intervalos no acotados.

Ejemplo 4: el intervalo formado por todos los números reales mayores o iguales que el número cinco $x \geq 5$. Si observamos este intervalo empieza con el número cinco y no tiene un último número.

- Intervalos no acotados

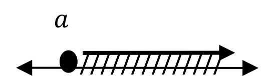
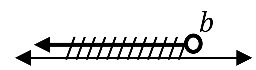
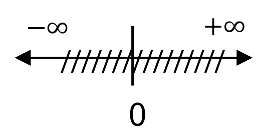
Son intervalos que no tienen límite inferior o superior; para representar esto se utilizará el símbolo ∞, el mismo se lee infinito, el cual indica que la sucesión de números continúa indefinidamente, es decir, que hay un valor mayor a cualquier cantidad asignable.

Cuando vamos a indicar que la sucesión de números crece, se le pondrá el signo positivo delante del símbolo, observe: + ∞ el cual se lee más infinito o infinito positivo, y si la sucesión decrece indefinidamente se le pondrá el signo negativo delante del símbolo, observe: $-\infty$ se lee menos infinito o infinito negativo. Si no hay lugar a confusión se podrá escribir simplemente: ∞ para referirse al más infinito.

Estos símbolos no representan un número real, por lo tanto, no se pueden hacer operaciones aritméticas con ellos.

La segunda tabla que se presenta a continuación ejemplifica los intervalos no acotados. En este tipo de intervalo nunca se podrá incluir el extremo representado por el infinito ya que el mismo no es un número real.

Tabla N°2. Clasificación de intervalos no acotados, según notación de intervalo, conjunto, desigualdad y gráfica.

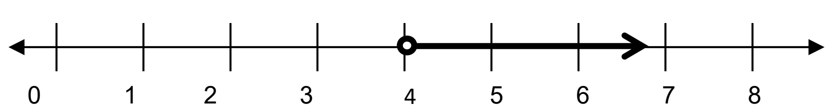
INTERVALOS INFINITOS (NO ACOTADOS)	**NOTACIÓN DE INTERVALO**	**NOTACIÓN DE CONJUNTO**	**NOTACIÓN DE DESIGUALDAD**	**NOTACIÓN GRÁFICA**
Formado por todos los números mayores que a	$(a, +\infty)$	$\{x \in \mathbb{R} / \ x > a\}$	$x > a$	
Formado por todos los números mayores o iguales que a	$[a, +\infty)$	$\{x \in \mathbb{R} / x \geq a\}$	$x \geq a$	
Formado por todos los números menores que b	$(-\infty, b)$	$\{x \in \mathbb{R} / x < b\}$	$x < b$	
Formado por todos los números menores o iguales que b	$(-\infty, b]$	$\{x \in \mathbb{R} / x \leq b\}$	$x \leq b$	
Contiene todos los números reales	$(-\infty, \infty)$	$\{x \in \mathbb{R} / -\infty < x < \infty\}$	$-\infty < x < \infty$	

Ejemplo 5: Represente en notación de desigualdad y notación gráfica los intervalos:

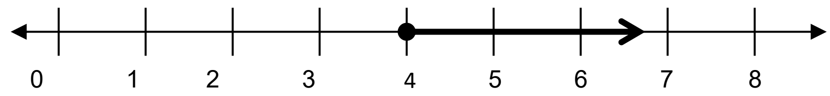
1) $(4, \infty)$
2) $[4, \infty)$
3) $(\infty. 6]$

Solución:

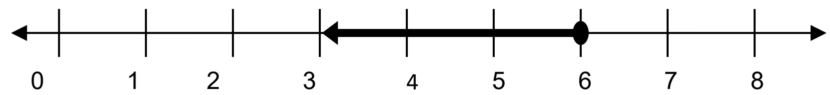
1) $x > 4$



2) $x \geq 4$



3) $x \leq 6$



En base a los conocimientos adquiridos desarrolla la siguiente actividad.

APLIQUE SUS CONOCIMIENTOS ¡Animo!

I-Complete la siguiente tabla, según el intervalo señalado

INTERPRETACIÓN	NOTACIÓN DE INTERVALO	NOTACIÓN DE CONJUNTO	NOTACIÓN DE DESIGUALDAD	NOTACIÓN GRÁFICA
• Números mayores o iguales que 1 y menores que 7.				
• Números mayores o iguales que -7 y menores que 1.				
• Números menores que 2.				
• Números mayores que 2.				

Avanzamos para seguir aprendiendo.

Unión e Intersección con Intervalos

Unión de conjuntos

Sea A y B dos intervalos, para representar la unión de A y B, se escribe A ∪ B.

A ∪ B queda representado por todos los elementos que pertenecen a A, o a B o a ambos. Lo anterior lo podemos escribir como: A ∪ B = { x / x ∈ A o x ∈ B}

La unión del intervalo A y B en la recta numérica es todo aquello que queda marcado sobre la recta luego de haber representado cada intervalo.

Intersección de conjuntos

Sea A y B dos intervalos, para representar la intersección de A y B.
Se escribe A ∩ B, al conjunto que representa todos los elementos que están simultáneamente en A y en B; en otras palabras, los elementos que son comunes a ambos conjuntos.

Lo anterior se puede escribir como:

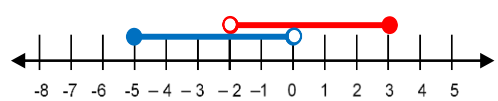
A ∩ B = { x / x ∈ A y x ∈ B}.

La intersección de los intervalos A y B en la recta real queda representada solo por aquellos números que fueron marcados por ambos intervalos.

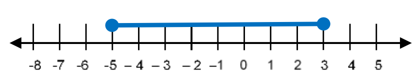
Ejemplo 6: Para los siguientes intervalos A= [-5,0) y B= $(-2, 3]$; determine la unión e intersección de A y B.

Solución:

El intervalo A esta representado en color azul y el intervalo B se ha representado en color rojo. **Pertenecen a la unión** aquellos números que están en A o B o en ambos.



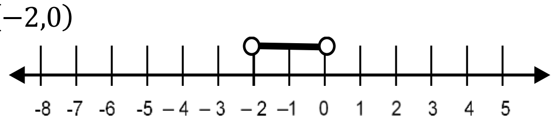
Todo aquello que queda marcado sobre la recta, representa entonces A ∪ B, lo cual podemos escribir de las siguientes formas:

- A ∪ B = $[-5,3]$
- A ∪ B = $-5 \leq x \leq 3$
- Notación gráfica A ∪ B 

Pertenecen a la intersección aquellos números que estén en A y estén en B a la vez.
A ∩ B queda representado en la recta real solo por aquellos números que se han marcado por ambas representaciones. Se puede escribir utilizando una de las siguientes formas:

A ∩ B = $x < 0$ y $x > -2$ o utilizando la doble desigualdad $-2 < x < 0$

A ∩ B = $(-2,0)$

A ∩ B = 

ACTIVIDAD N°1

Apliquemos lo aprendido

I-Selección Única. Identificación de Intervalo. Coloque sobre la raya en blanco la letra que contiene la respuesta correcta.

1) **La representación en forma de intervalo de $x < 1$ es:** ______

   a. $(-\infty, 1)$ **b.** $[-\infty, 1]$ **c.** $(1, \infty]$

2) **La representación gráfica del intervalo $[3,\ 4)$ es:** ______

   a. 

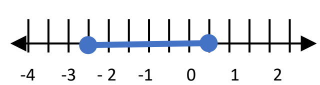
   b. 

3) **De las siguientes relaciones, ¿cuál es verdadera?** ______

   a. - 5 >- 7 **b. -5 < -7** **c. -5 = -7**

4) **Un ejemplo de intervalo semi abierto por la derecha es:** ______

   a. $(-3, 4]$ **b.** $[-3\ ,\ 4)$ **c.** $[-3, 4]$

5) **La representación como intervalo de** 

es: ______

   a. $[-3,5\ ,\ \ 0,5]$ **b.** $[-2,5\ ,\ \ 0,5]$ **c.** $(-2,5\ ,\ \ 0,5)$

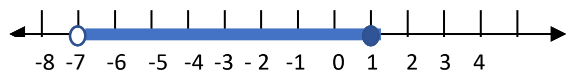
6) **Un ejemplo de intervalo cerrado es:** ______

   a. $(-1, 0)$ **b.** $(-1,\ 0]$ **c.** $[-1, 0]$

7) **Al conjunto entre dos números se les denomina:** ______

   a. Desigualdad **b. Intervalos** **c. Ley de La tricotomía.**

II-Reconoce y aplique diferentes notaciones. Complete la siguiente tabla escribiendo el conjunto solución de los siguientes intervalos en las notaciones faltantes:

NOTACIÓN DE INTERVALO	NOTACIÓN DE CONJUNTO	NOTACIÓN DE DESIGUALDAD	NOTACIÓN GRÁFICA
			
	$\{x \in \mathbb{R} / x \geq -2\}$		
[-2,5; 5]			
		$x \leq \frac{1}{2}$	

III- Relación a situaciones cotidianas. Escribe los rangos numéricos de las siguientes situaciones dadas en lenguaje natural en notación de desigualdad.

1. Edad de las personas que en Panamá no pueden votar para la elección de Presidente de la República: ______________________________.

2. El máximo de velocidad permitido en un trayecto de carretera es de 100 km/h:____________________.

3. El 18 de marzo de 2020, el diario La Prensa publicó que la directora Nacional de Epidemióloga del MINSA, Lourdes Moreno, señala que la mayor parte de pacientes afectados por COVID-19 tienen un rango de edad entre 40 a 59 años ________________ y le sigue el rango de edad de 20 a 39 años ______________________, (para nuestro taller los intervalos se señalarán incluyendo el límite de edad inferior, mas no así el límite de edad superior).

4. Durante la cuarentena en marzo de 2020, en Panamá las personas solo podían salir de su casa durante el día según el último digito en su número de cédula, investiga y escribe en notación de intervalo, el horario que puede salir una persona si el último digito de su cédula es 8. _________________.

5. Para obtener ganancias, nuestra empresa debe vender no menos de 100 artículos ____________________.

6. Un estudiante de bachiller en ciencias para ser promovido de grado en una asignatura, puede obtener una nota en el siguiente rango:________________, de acuerdo al promedio de sus calificaciones.

7. El Corredor Logístico del Canal está diseñado para el tránsito de vehículos de carga (camiones, camiones combinados y vehículos articulados), escribe un intervalo que incluya la altura máxima permitida que es de 4.15 metros. _________________.

IV -Operaciones con Intervalos

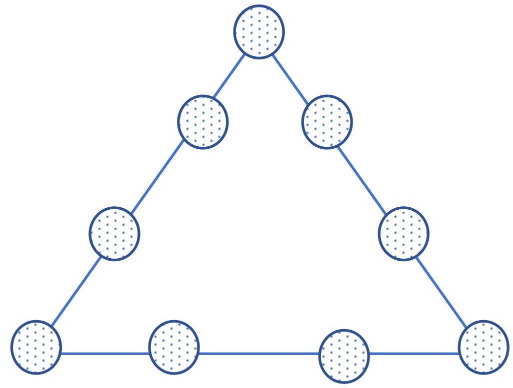
A. Para los intervalos A=$[-\mathbf{2},\mathbf{4}]$, $\boldsymbol{B}=(\mathbf{0},\mathbf{7}]$ $\boldsymbol{C}=(-\mathbf{5},\infty)$ determina lo solicitado a continuación, presenta la respuesta en la notación solicitada

- $\boldsymbol{A}\cup\boldsymbol{B}$ respuesta en notación de intervalo
- $\boldsymbol{A}\cap\boldsymbol{C}$ respuesta en notación de desigualdad
- $\boldsymbol{B}\cup\boldsymbol{C}$ respuesta en notación gráfica

Realice sus operaciones aquí↓

Aplica tus conocimientos-Pensamiento lógico matemático.

1. Coloca en los círculos de este triángulo los números del 1 al 9 de tal manera que la suma de cada lado sea 17.



¡Ahora sí! repasemos lo aprendido.

I-Actividad basada en **Which One Doesn't Belong?**[1]

Para cada tarjeta encuentra una razón por la cual se puede considerar es un intruso en el grupo de tarjetas.

Tarjeta 1 	Tarjeta 2 $(-\infty, 0)$
Tarjeta 3 $[-9, -1]$	Tarjeta 4 $[-3, \infty)$

Por ejemplo, **la tarjeta 1** es un intruso dentro del grupo de tarjetas, ya que su representación no es en notación de intervalo. **¡Es tu turno!** Encuentra una razón para cada una de las tarjetas para considerarla un intruso en el grupo.

¡Felicidades!

Recuerde revisar la teoría ante cualquiera duda.

[1]Adaptada de: https://wodb.ca/numbers.html

TEMA 2. DESIGUALDADES LINEALES

Un poco de Historia.

Las inecuaciones son una variante del Álgebra. El período de 1700 A.C y 1700 D.C, se caracterizó por una invención gradual de símbolos y resolución de ecuaciones.

Thomas Harriot (1560-1621), en una publicación póstuma utiliza la notación exponencial moderna y es el primero en utilizar símbolos para indicar las desigualdades "menor que" y "mayor que"

Las inecuaciones son utilizadas para las aplicaciones matemáticas que tienen que ver con el mundo físico.

Una desigualdad es una relación en la que utilizamos alguno de símbolos >, < o =, $\geq$, $\leq$. Como ejemplo de desigualdades tenemos las siguientes:

$$\mathbf{5+3<4}, \qquad \mathbf{8+4\geq 12}$$

Si una desigualdad contiene incógnitas (variables), se denomina *inecuación.* Las soluciones de una inecuación como -$2x + 6 > 0$ son aquellos valores de la x para los que la expresión $-2x + 6$ es mayor que cero.

Cuando una inecuación se escribe de la forma $ax+b>c$ ó $ax+b<c$ se dice que es una **inecuación lineal**.

- Propiedades de las desigualdades

Si $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ y $\boldsymbol{c}$ son números reales y $\boldsymbol{a<b}$, entonces:

1. Si $a<b$, entonces $a+c<b+c$ — Propiedad de la adición (Para todo $\boldsymbol{c} \in \mathbb{R}$ **la desigualdad se mantiene**)
2. Si $a<b$, entonces $a-c<b-c$ — Propiedad de la sustracción (Para todo $\boldsymbol{c} \in \mathbb{R}$ **la desigualdad se mantiene**)
3. Si $a<b$, y $c>0$ entonces $ac<bc$ — Propiedad de la multiplicación (si $\boldsymbol{c}$ es **negativo** el sentido de **la desigualdad se invierte**).
4. Si $a<b$, y $c<0$ entonces $ac>bc$ — Propiedad de la multiplicación (si $\boldsymbol{c}$ es **negativo** el sentido de **la desigualdad se invierte**).
5. Si $a<b$, y $c>0$ entonces $\frac{a}{c}<\frac{b}{c}$ — Propiedad de la división (si $\boldsymbol{c}$ es **positivo** **la desigualdad se mantiene**)
6. Si $a<b$, y $c<0$ entonces $\frac{a}{c}>\frac{b}{c}$ — Propiedad de la división (si $\boldsymbol{c}$ es **negativo** el sentido **la desigualdad se invierte**).

Para mostrar las propiedades anteriores se utilizó el símbolo $<$, cabe señalar que las propiedades son válidas para los símbolos $>$, $\leq$, $\geq$.

Ejemplo 1. Aplicación de las propiedades:

- Se tiene que $0 < 5$ entonces $0 + 4 < 5 + 4$, de donde se obtiene que $4 < 9$ **(desigualdad se mantiene)**
- Se tiene que $-2 < 3$ entonces $-2 - 3 < 3 - 3$, de donde se obtiene que $-5 < 0$ **(desigualdad se mantiene)**
- Se tiene que $-3 < 5$ entonces $-3(2) < 5(2)$, de donde se obtiene que $-6 < 10$ (desigualdad se mantiene).
- Se tiene que $-2 < 4$ entonces $\frac{-2}{2} < \frac{4}{2}$, de donde se obtiene que $-1 < 2$ **(desigualdad se mantiene).**

Note que:

- Se tiene que $-3 < 5$ entonces $-3(-2)\ ?\ 5(-2)$, de donde se obtiene los números $6\ y\ -10$ para que la desigualdad sea cierta se debe invertir el sentido de la desigualdad así $6 > -10$.
- Se tiene que $-2 < 4$ entonces $\frac{-2}{-2}\ ?\ \frac{4}{-2}$, de donde se obtiene los números $1\ y\ -2$ para que la desigualdad sea cierta se debe invertir el sentido de la desigualdad así $1 > -2$.

El conjunto formado por todos los valores que satisfacen la desigualdad propuesta se conoce como **el conjunto solución.**

Ejemplo 2. Resuelva la siguiente inecuación $2 + 3x < 5x + 8$. Exprese su respuesta en notación de intervalo, de conjunto y gráfica.

Solución:

$\mathbf{2 + 3x < 5x + 8}$

$3x - 5x < 8 - 2$ → Para iniciar debe ubicar las variables a la izquierda y los números a la derecha. Recuerda cambiar el signo cuando sea necesario.

$-2x < 6$ → Reduzca los términos semejantes.

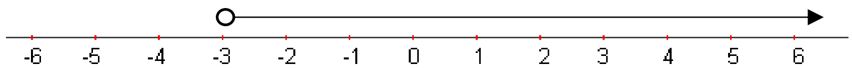
$\frac{-2\,x}{-2} < \frac{6}{-2}$ → Divida ambos lados de la inecuación entre el coeficiente de la variable.

$x > -3$ → Observe que **<u>el sentido de la desigualdad cambio</u>**. Esto se debe a que **<u>dividimos ambos miembros entre un número negativo</u>**.

Continuando con el ejemplo, tenemos que:

Notación de Intervalo: $(-3, \infty)$ **Notación de Conjunto:** $\{x \in \mathbb{R}: x > -3\}$

Gráfica



Ejemplo 3: Resuelva la siguiente inecuación: $2(2x+3)-8 < 6(x-2)+2$**. Exprese su respuesta en notación de intervalo.**

Solución:

$2(2x+3)-8 < 6(x-2)+2$

$4x+6-8 < 6x-12+2$ → Primero se resuelve los paréntesis.

$4x-2 < 6x-10$ → Reduce los términos semejantes antes de transponer términos.

$4x-6x < -10+2$ → Transponer términos con variables al primer miembro y términos constantes al segundo miembro.

$-2x < -8$ → Reduce los términos semejantes.

$\frac{-8}{-2}x > \frac{-8}{-2}$ → El sentido de la desigualdad se invierte, ya que dividimos por una cantidad negativa.

$x > 4$ → Respuesta en notación de desigualdad.

$(4, \infty)$ → **Respuesta en notación de intervalo.**

Ejemplo 4: Resuelva la siguiente inecuación $\frac{2}{5}x - \frac{1}{2}(x-3) \leq \frac{2}{3}x - \frac{3}{10}(x+2)$**. Exprese tu respuesta en notación de intervalo, de conjunto y gráfica.**

Solución:

$(30)\frac{2}{5}x - (30)\frac{1}{2}(x-3) \leq (30)\frac{2}{3}x - (30)\frac{3}{10}(x+2)$ → Eliminamos los denominadores, multiplicando por el MCM.

$12x - 15(x-3) \leq 20x - 9(x+2)$ → Realizamos las operaciones para simplificar

$12x - 15x + 45 \leq 20x - 9x - 18$ → Multiplicamos los factores delante del paréntesis

$12x - 15x - 20x + 9x \leq -45 - 18$ → Ubicamos las variables a la izquierda.

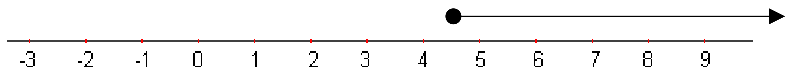
$-14x \leq -63$ → Reducimos términos semejantes

$\frac{-14x}{-14} \leq \frac{-63}{-14}$ → Dividimos entre el coeficiente de la variable

$x \geq \frac{9}{2}$ → Cambiamos el sentido de la desigualdad ya que dividimos entre un número negativo.

Notación de Intervalo: $\left[\frac{9}{2}, \infty\right)$ **Notación de Conjunto:** $\left\{x \in \mathbb{R}: x \geq \frac{9}{2}\right\}$

Gráfica



- Resolución de dobles desigualdades

Se nos pueden presentar dobles desigualdades con variable sólo en el miembro central o con variable en más de un miembro.

Cuando la variable sólo aparezca en el miembro del medio se pueden manipular juntas las dos desigualdades y el objetivo será despejar la variable en el miembro central. Si la variable aparece en más de un miembro y no logramos aislarla en el miembro central, entonces se recurrirá a separar las desigualdades y resolverlas por separados, al final se verifica qué valores resuelven a las dos desigualdades a la vez siendo estos la solución del problema planteado, en otras palabras, es buscar la intersección de los conjuntos solución de las dos desigualdades.

Ejemplo 5: Resuelve la siguiente inecuación $13 \geq 2x - 3 \geq 5$. Expresa tu respuesta en notación de intervalo, de conjunto y gráfica.

Solución:

Como la variable solo aparece en el miembro central, la solución estará determinada cuando la variable esté despejada en el miembro central, se procede de la siguiente forma:

$\mathbf{13 + 3 \geq 2x - 3 + 3 \geq 5 + 3}$ → Para iniciar debes dejar la variable sola. Por esta razón sumamos 3.

$\mathbf{16 \geq 2x \geq 8}$ → Reduce los términos semejantes

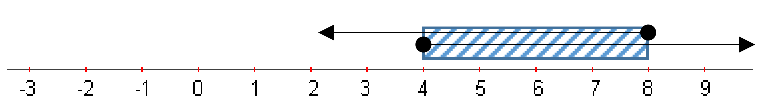
$\frac{16}{2} \geq \frac{2x}{2} \geq \frac{8}{2}$ → Dividimos entre 2, ya que es el coeficiente de la variable.

$\mathbf{8 \geq x \geq 4}$ → Esta es la respuesta, pero debe ser ordenada. Ya que no coincide con el orden en la recta numérica

$4 \leq x \leq 8$ → Esta sería la respuesta correcta.

Notación de Intervalo: $[\mathbf{4}, \mathbf{8}]$ **Notación de Conjunto:** $\{x \in \mathbb{R}: 4 \leq x \leq 8\}$

Gráfica



Ejemplo 6: Resuelva la siguiente inecuación $\mathbf{3x-4 \leq x-5 < 2x-1}$. Exprese su respuesta en notación de intervalo, de conjunto.

Solución:

Para determinar el conjunto solución se debe separar la doble desigualdad, la doble desigualdad $a \leq b < c$ significa que $a \leq b$ y al mismo tiempo $b < c$, por lo tanto, tenemos que:

$$3x - 4 \leq x - 5$$

Se determina el conjunto solución de la primera desigualdad

$$3x - x \leq -5 + 4$$

$$2x \leq -1$$

$$x \leq -\frac{1}{2}$$

y

$$x - 5 < 2x - 1$$

Se determina el conjunto solución de la segunda desigualdad

$$x - 5 < 2x - 1$$

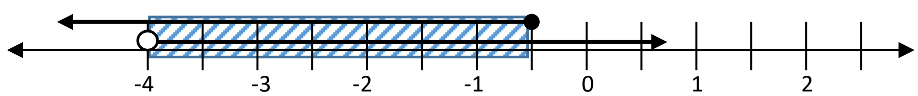
$$x - 2x < -1 + 5$$

$$-x < 4$$

$$x > \frac{4}{-1}$$

$$x > -4$$

Los números reales que resuelven a ambas desigualdades son la solución de la doble desigualdad, se grafican las soluciones para ver más fácilmente los elementos comunes en las soluciones.



Notación de Intervalo: $\left(-\mathbf{4}, -\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\right]$ **Notación de Conjunto:** $\left\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}: -4 < x \leq \frac{1}{2}\right\}$

ACTIVIDAD N°2

_________ Apliquemos lo aprendido________

I- Escriba en el espacio correspondiente (>, < o =), según corresponda

a) $|6|$ ____ $|-6|$

b) $\frac{2}{3}$_____ $\frac{3}{5}$

c) $1+4$____ $-3+2$

II- Complete el espacio en blanco con el símbolo de desigualdad apropiado; para esto, considere los valores representados en el intervalo y sustituya en la expresión los que considere necesarios.

a) Si $x<3$, entonces $x-3$ _____ 2

b) Si $x\leq 4$, entonces $3x$ _____ 15

c) Si $x\geq 2$, entonces $-3x$ _____ -6

d) Si $x<-4$, entonces $-x$ _____ -3

e) Si $x>0$ entonces x _____ -10

III-Resuelva las inecuaciones. Exprese su respuesta en notación de intervalo, de conjunto y gráficamente.

a) $x-5>2$

b) $3x-4<x+1$

c) $\frac{2}{3}x+4\leq 6$

d) $2(x-3)+5\geq 5-x$

e) $-1\leq 7-2x<3$

f) $-12<\frac{3}{4}(2-x)\leq 24$

g) $16<7-3x<31$

h) $2\leq 3x-7<14$

i) $\frac{x}{6}-\frac{1}{2}>\frac{2}{3}+x$

j) $24\leq\frac{2}{3}(x-5)<36$

k) $2x-1\leq 5-2x\leq 3x+10$

IV- Aplicaciones en la vida diaria. Le invitamos a analizar las situaciones vinculadas a las inecuaciones y la vida diaria, obtenidas del Libro de Pre cálculo de Stewart[2]**.**

a. **Costo de una llamada de larga distancia:** una compañía telefónica ofrece dos planes de llamadas de larga distancia.
   Plan A. B/. 25,00 por mes y 0,05 centavos por minuto
   Plan B. B/. 5,00 por mes y 0,12 centavos por minuto.
   ¿Para cuantos minutos de llamadas de larga distancia sería financieramente ventajoso el Plan B?
b. **Costo de manejar un auto** Se estima que el costo anual de manejar cierto auto nuevo está dado por la fórmula $C = 0{,}35m + 2200$ donde m representa el número de millas recorridas por año y C es el costo en dólares. Juana compró ese auto y decide presupuestar entre B/.6 400 y B/. 7 100 para costos de manejo del año siguiente. ¿Cuál es el intervalo correspondiente de millas que ella puede manejar su nuevo auto?

Realice sus operaciones aquí↓

¡Felicidades! Ha culminado el Tema 2.
Recuerde revisar la teoría ante cualquiera duda.

[2] Stewart, Redlin, Watson (2012). Pre cálculo, Matemáticas para el cálculo. Sexta Edición. ISBN: 978 – 607 – 481-826-0

TEMA 3. DESIGUALDADES CUADRÁTICAS

A continuación, estudiaremos **desigualdades cuadráticas** con una incógnita.

Para encontrar su solución es necesario emplear en muchas ocasiones los casos de factorización. El método que utilizaremos para resolverlas consiste en:

1. Si la desigualdad tiene términos en ambos miembros, se trasladan todos a un mismo miembro (usualmente se trasladan al miembro izquierdo) de forma que el número cero sea el resultado en el otro miembro.

2. De ser posible se ***factoriza*** el polinomio cuadrático por simple inspección.

3. Determina el valor que hace cero cada factor, esto se obtiene igualando cada factor a cero y despejando la variable, el valor encontrado hace cero el factor, por lo tanto, es una raíz del polinomio cuadrático. Dichas raíces se marcan sobre la recta real, las cuales dividirán a la recta en intervalos.

4. ***Hacer una tabla***. Luego se escoge un elemento o número de cada intervalo (valor de prueba) para descubrir el signo del Polinomio cuadrático.

5. ***Resolver***: Se selecciona el o los intervalos donde el signo satisfaga la desigualdad, éste o estos intervalos serán el conjunto solución de la desigualdad. Así, si la desigualdad dice **"< 0"**, su conjunto solución son aquellos intervalos donde el signo es negativo **"–"**; y si la desigualdad dice **"> 0 "**, su conjunto solución son aquellos intervalos donde el signo es **positivo "+".**

6. Si las raíces del polinomio no son números racionales, se puede utilizar la fórmula cuadrática para encontrar las raíces reales del polinomio, si las hay. De no tener raíces reales la fórmula cuadrática también te ayuda a determinarlo.

Ejemplo 1: Resuelva la inecuación $x^2 < x + 6.$

Solución: Seguiremos la guía de pasos dada anteriormente:

Este símbolo, nos ayudará a encontrar nuestra respuesta; como es menor buscamos un negativo.

$x^2 < x + 6.$

$x^2 - x - 6 < 0$ →Colocamos todos los términos en el miembro izquierdo.

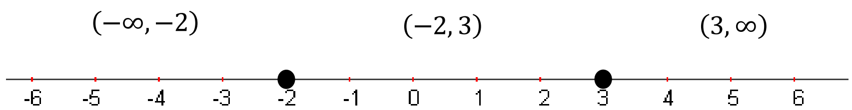
$(x-3)(x+2) < 0$ → Factorizamos.

$x - 3 = 0 \quad x + 2 = 0$

$x = 3 \quad x = -2$

Estos son los intervalos a utilizar.

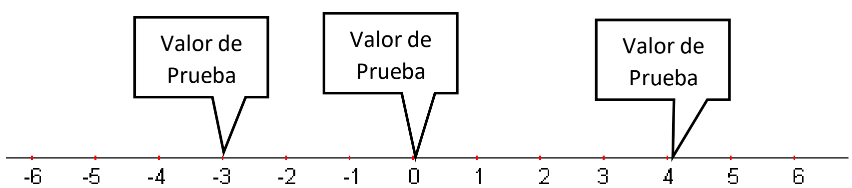
Para encontrar los intervalos debemos ubicar los factores encontrados en la recta numérica



Siguiendo los pasos ahora debemos construir una tabla.

Intervalo	Valor de Prueba	Solución	Signo
$(-\infty,-2)$	$\mathbf{-3}$	$+\mathbf{6}$	$+$
$(-2,3)$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{-6}$	$-$
$(3,\infty)$	$\mathbf{+4}$	$+\mathbf{6}$	$+$

Estos números se llaman valor de prueba, se toman al azar de los intervalos definidos.



Para encontrar la solución debemos evaluar cada valor en la ecuación de original, de la siguiente manera:

Para el Intervalo $(-\infty,-\mathbf{2})$

$x^2 - x - 6, con\ x = -3$
$= (-3)^2 - (-3) - 6$
$= 9 + 3 - 6$
$= 12 - 6$
$= 6$

Para el Intervalo $(-\mathbf{2},\mathbf{3})$

$x^2 - x - 6, con\ x = 0$
$= (0)^2 - (0) - 6$
$= 0 + 0 - 6$
$= -6$

Para el Intervalo $(\mathbf{3},\infty)$

$x^2 - x - 6, con\ x = 4$
$= (4)^2 - (4) - 6$
$= 16 - 4 - 6$
$= 16 - 10$
$= 6$

Los signos de cada respuesta, son los que se ubicarán en la columna correspondiente a signo.

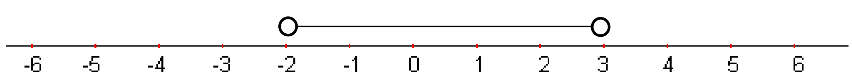
Intervalo	$(-\infty,-2)$	$(-2,3)$	$(3,\infty)$
Valor de prueba	$\mathbf{-3}$	**0**	**4**
Signo de $(x+2)$	$-$	$+$	$+$
Signo de $(x-3)$	$-$	$-$	$+$
Signo de $(x+2)(x-3)$	$+$	$-$	$+$

Esta es una forma alternativa de realizar la búsqueda de la solución.
Aquí utilizamos los intervalos y buscamos valores de prueba, igual que antes. La diferencia es que evaluamos en cada factor encontrado para obtener el signo. Al final, multiplicamos los signos obtenidos para obtener nuestra respuesta.

Luego de realizados todos los pasos antes mencionados, solo nos queda determinar la respuesta de la inecuación. La solución se obtiene examinando los signos de las tres desigualdades obtenidas, lo hacemos de la siguiente manera:

- El intervalo $(-\infty,2)$da $+$,
- El intervalo $(-2,3)$ da – , y
- El intervalo $(3,\infty)$ da $+$.

Como el problema es menor que cero; es decir, $x^2 - x - 6 < 0$. *La solución es:* $(-2,3)$ *puesto que en este intervalo conseguimos una solución negativa y la representación gráfica es:*



Ejemplo 2. Resuelva la inecuación $3x^2 + 10x \geq 8$

Solución:

Seguiremos la guía de pasos dada anteriormente:

Este símbolo, nos ayudará a encontrar nuestra respuesta; como es mayor igual buscamos un signo positivo

$3x^2 + 10x \geq 8.$

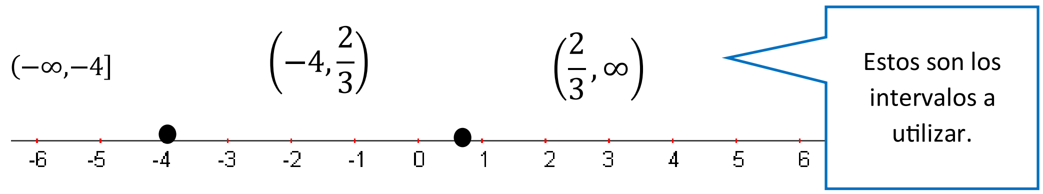
$3x^2 + 10x - 8 \geq 0$ →Colocamos todos los términos al lado izquierdo.

$(3x-2)(x+4) \geq 0$ → Factorizamos

$3x - 2 = 0 \qquad x + 4 = 0$

$x = \dfrac{2}{3} \qquad x = -4$

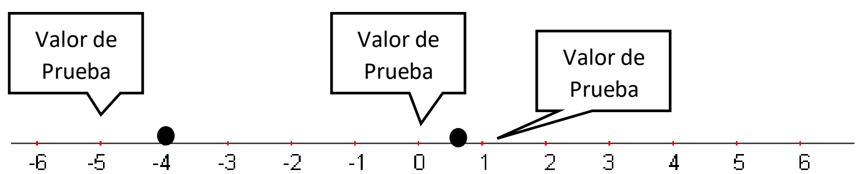
Para encontrar los intervalos debemos ubicar los factores encontrados en la recta numérica



Siguiendo los pasos ahora debemos construir una tabla.

Intervalo	Valor de Prueba	Solución	Signo
$(-\infty,-4)$	-5	17	+
$\left(-4,\frac{2}{3}\right)$	0	-8	$-$
$\left(\frac{2}{3},\infty\right)$	1	5	+

Estos valores se llaman valor de prueba, se toman de los intervalos definidos anteriormente



Para encontrar la solución debemos evaluar cada valor en la ecuación de original, de la siguiente manera:

Para el Intervalo
$(-\infty,-4)$

$3x^2 + 10x - 8,$
$con\ x = -5$
$= 3(-5)2 + 10(-5) - 8$
$= 3(25) - 50 - 8$
$= 75 - 58$
$= 17$

Para el Intervalo
$\left(-4,\frac{2}{3}\right)$
$3x^2 + 10x - 8,$
$con\ x = 0$
$= 3(0)^2 + 10(0) - 8$
$= 3(0) - 0 - 8$
$= -8$

Para el Intervalo
$\left(\frac{2}{3},\infty\right)$
$3x^2 + 10x - 8,$
$con\ x = 1$
$= 3(1)^2 + 10(1) - 8$
$= 3(1) + 10 - 8$
$= 3 + 10 - 8$
$= 13 - 8$
$= 5$

Los signos de cada respuesta, son los que se ubicaran en la columna correspondiente a signo.

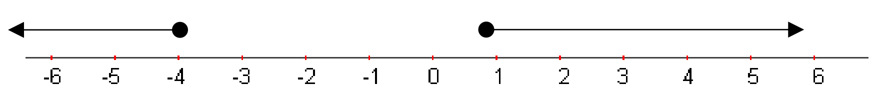
Intervalo	$(-\infty,-4)$	$\left(-4,\frac{2}{3}\right)$	$\left(\frac{2}{3},\infty\right)$
Valor de prueba	**-5**	**0**	**1**
Signo de $(3x-2)$	$-$	$-$	$+$
Signo de $(x+4)$	$-$	$+$	$+$
Signo de $(3x-2)(x+4)$	$+$	$-$	$+$

Esta es una forma alternativa de realizar la búsqueda de la solución.
Aquí utilizamos los intervalos y buscamos valores de prueba, igual que antes. La diferencia es que evaluamos en cada factor encontrado para obtener el signo. Al final, multiplicamos los signos obtenidos para obtener nuestra respuesta.

Luego de realizados todos los pasos antes mencionados, solo nos queda determinar la respuesta de la inecuación. La solución se obtiene examinando los signos de las tres desigualdades obtenidas, lo hacemos de la siguiente manera:

- El intervalo $(-\infty,-4)$ da $+$,
- El intervalo $\left(-4,\frac{2}{3}\right)$ da $-$, y
- El intervalo $\left(\frac{2}{3},\infty\right)$ da $+$.

Como el problema es mayor que cero; es decir, $3x^2+10x-8\geq 0$. La solución es la unión de los dos intervalos que dan positivo, estos son: $(-\infty,-4)$ y $\left(\frac{2}{3},\infty\right)$, además la desigualdad también se satisface para los números que la hacen igual a cero, por lo tanto, se deber incluir en la respuesta las raíces del polinomio cuadrático. Esto lo expresamos de la siguiente manera $(-\infty,-4]\cup\left[\frac{2}{3},\infty\right)$ y su gráfica es:



Ampliemos nuestro aprendizaje ¡Ánimo!...

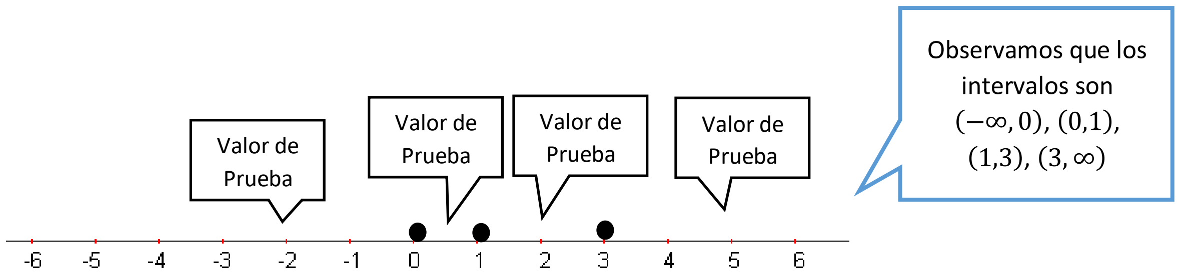
- Desigualdad polinomial de grado mayor a dos

Note que, puede guiarse para determinar la solución de una desigualdad polinomial de la secuencia de pasos descrita anteriormente.

Ejemplo 3. Resuelva la desigualdad $x(x-1)^2(x-3)<0$

Solución:

En este caso, la desigualdad tiene factores repetidos como podemos observar en $(x-1)^2$, también observamos que todos los términos ya están a la izquierda y factorizados; por lo tanto, es fácil encontrar los intervalos de la desigualdad.



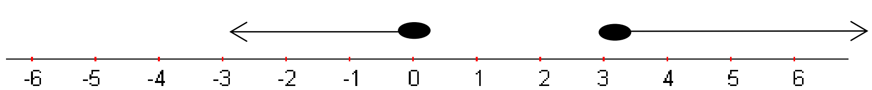
Procedemos a hacer la tabla o diagrama para encontrar la solución.

Intervalo	$(-\infty,0)$	$(0,1)$,	$(1,3)$	$(3,\infty)$
Valor de prueba	$\mathbf{-2}$	$\mathbf{0{,}5}$	$\mathbf{2}$	$\mathbf{5}$
Signo de x	$-$	$+$	$+$	$+$
Signo de $(x-1)^2$	$+$	$+$	$+$	$+$
Signo de $(x-3)$	$-$	$-$	$-$	$+$
Signo de $x(x-1)^2(x-3)$	$+$	$-$	$-$	$+$

Luego de realizados todos los pasos antes mencionados, solo nos queda determinar la respuesta de la inecuación. La solución se obtiene examinando los signos de las tres desigualdades obtenidas, lo hacemos de la siguiente manera:

- El intervalo $(-\infty,0)$ da $+$,
- El intervalo $(0,1)$ da $-$,
- El intervalo $(1,3)$ da $-$,
- El intervalo $(3,\infty)$ da $+$.

Como el problema es menor que cero; es decir, $x(x-1)^2(x-3)<0$. La solución es la unión de los dos intervalos que dan negativo, estos son: $(0,1)$, $(1,3)$. Esto lo expresamos de la siguiente manera: en **notación de intervalo** $(0,1)\ \cup\ (1,3)$ y en **notación gráfica** es:



ACTIVIDAD N°3.

__________ Apliquemos lo aprendido________

I-En la siguiente tabla completa los datos que se solicitan

Intervalos	Factorización	Puntos Críticos	Graficando los puntos críticos
$x^2 + x - 20 \leq 0$	( )( )	{ }	-3 -2 -1 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
$5x^2 + x - 6 > 0$	( )( )	{ }	-3 -2 -1 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
$20x^2 - x - 1 < 0$	( )( )	{ }	-3 -2 -1 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
$6x^2 - 13x + 6 \geq 0$	( )( )	{ }	-3 -2 -1 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
$2x^2 + 9x + 9 \leq 0$	( )( )	{ }	-3 -2 -1 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
$4x^2 + 7x + 3 \geq 0$	( )( )	{ }	-3 -2 -1 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
$2x^2 - 7x + 3 < 0$	( )( )	{ }	-3 -2 -1 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

II-Resuelva las inecuaciones cuadráticas de acuerdo al método explicado, escriba la solución en forma de intervalo y represéntala gráficamente.

1) $6x^2 - 5 > x$

2) $x(x - 3) + (x + 1)(x - 1) - (x + 4)^2 \geq -5$

3) $(2x + 1)(10 - 3x) < 0$

4) $3x^2 + 2x + 2 < 2x^2 + x + 4$

5) $2x^2 + 3x > 2$

6) $x^2 < 10 - 3x$

7) $x^2 \leq 10x$

8) $x^2 + 2x > 3$

III-Aplicaciones en la vida diaria

a. Temperatura en una fogata. En la cercanía de una fogata, la temperatura T en $^{\underline{o}}C$ a una distancia de x metros del centro de la fogata está dada por: $T = \frac{600\,000}{x^2+300}$.

¿A qué intervalo de distancia desde el centro de la fogata era la temperatura menor a 500º C?

¡Genial! Ha culminado el Tema 3.

TEMA 4. DESIGUALDADES RACIONALES

Una desigualdad racional es aquella formada por un polinomio en el numerador y otro polinomio en el denominador como se ilustra a continuación:

$$\frac{x+2}{5x-3} > 0 \qquad\qquad \frac{x^2-9}{2-x} \leq 0$$

Para resolverlas se sigue un esquema de pasos parecido al de las desigualdades cuadráticas:

1. Agrupe todos los términos en el primer miembro de la desigualdad de forma tal que el segundo miembro sea cero.
2. Reduzca el primer miembro a un solo término es decir una expresión con un denominador común.
3. Factorice los polinomios tanto del numerador como del denominador.
4. Determine las raíces de los polinomios resultantes en el numerador y en el denominador, luego iguala a cero cada factor y despeja la variable.
5. Defina los intervalos.
6. Construya una tabla.
7. Determine la solución.

Ejemplo 1. Resuelva la inecuación $\frac{3x}{x+2} - 5 < 0$

Solución:

Todos los términos ya están de un solo lado (el lado izquierdo) así que procedemos con el siguiente paso.

Este símbolo, nos ayudará a encontrar nuestra respuesta; como es menor buscamos un negativo.

$\frac{3x-5(x+2)}{x+2} < 0$ → Buscamos el mínimo común múltiplo para colocar todo en un solo denominador.

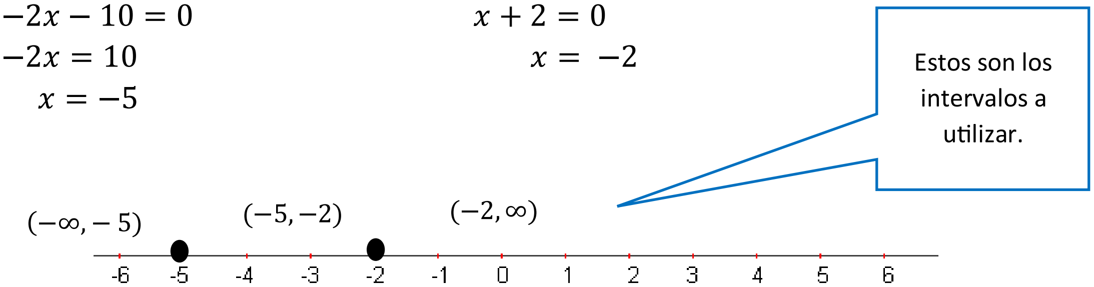
$\frac{3x-5x-10}{x+2} < 0$ → Realizamos la multiplicación

$\frac{-2x-10}{x+2} < 0$ → Reducimos los términos semejantes.

Debemos tener en cuenta que como el símbolo expresa que la expresión racional es menor a cero, es decir negativa, hay dos opciones para que una división nos de signo negativo. Siendo estas: $\frac{+}{-} = -$ y $\frac{-}{+} = -$

Para encontrar los intervalos analizamos nuestros factores $(-2x-10)$ y $(x+2)$. Los igualaremos a cero para ver donde se anulan.

$$-2x-10=0 \qquad\qquad x+2=0$$
$$-2x=10 \qquad\qquad x=-2$$
$$x=-5$$



Utilizaremos la tabla alternativa explicada anteriormente para resolver

Intervalo	$(-\infty,-5)$	$(\mathbf{-5},\mathbf{-2})$	$(\mathbf{-2},\infty)$
Valor de prueba	$\mathbf{-6}$	$\mathbf{-4}$	$\mathbf{0}$
Signo de $-2x-10$	$+$	$-$	$-$
Signo de $x+2$	$-$	$-$	$+$
Signo de $\frac{-2x-10}{x+2}$	$-$	$+$	$-$

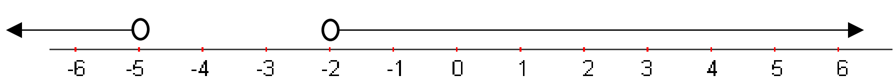
Signos de la respuesta

Luego de realizados todos los pasos antes mencionados, solo nos queda determinar la respuesta de la inecuación. La solución se obtiene examinando los signos de los tres intervalos obtenidos, lo hacemos de la siguiente manera:

- El intervalo $(-\infty,-5)$da $-$,
- El intervalo $(\mathbf{-5},\mathbf{-2})$ da $+$, y
- El intervalo $(\mathbf{-2},\infty)$ da $-$.

Esto nos indica que los factores son cero cuando x es -5 y -2. Estos números dividen la recta en los intervalos indicados a continuación

Como el problema es menor que cero; es decir, $\frac{-2x-10}{x+2}<0$. La solución es la unión de los dos intervalos que dan negativo, estos son: $(-\infty,-5)$y $(-2,\infty)$. Esto lo expresamos de la siguiente manera $(-\infty,-5)\cup(-2,\infty)$ y su representación gráfica es:



ACTIVIDAD N°4

Apliquemos lo aprendido

I- Resuelva las inecuaciones dadas a continuación, exprese su respuesta en forma de intervalo y gráficamente.

1. $\frac{5x}{x-4} \geq 6$
2. $\frac{x+4}{2x-1} < 3$
3. $\frac{x-2}{x+4} \leq 0$
4. $\frac{3x+1}{x+4} \leq 1$
5. $\frac{2}{x+1} \geq \frac{1}{x-2}$
6. $\frac{x^2+5x}{x-3} \geq 0$

Realice sus operaciones aquí↓

¡Felicidades! Ha culminado el Tema 4.

Recuerde revisar la teoría ante cualquiera duda.

TEMA 5. DESIGUALDADES CON VALOR ABSOLUTO

El valor absoluto de un número real a se denota encerrándolo entre dos barras verticales, observe $|a|$ y se define como sigue:

$$|a| = \begin{cases} +a, & si\ a \geq 0 \\ 0, & si\ a = 0 \\ -a, & si\ a < 0 \end{cases}$$

Ejemplo 1:

$$|5| = 5$$
$$|0| = 0$$
$$|-5| = 5$$

Geométricamente el valor absoluto de un número real nos indica la distancia a la cual se encuentra este número del cero. Por ejemplo, $|5|$ (léase valor absoluto de 5) es igual a 5, y nos indica que la distancia del punto 5 al origen (en la recta real), o sea al cero, es 5 unidades.

- Propiedades del valor absoluto:
  1. $|x| < c \leftrightarrow\ -c \leq x \leq c$
  2. $|x| \leq c \leftrightarrow\ -c \leq x \leq c$
  3. $|x| > c \leftrightarrow\ x < -c\ \text{ó}\ c < x$
  4. $|x| \geq c \leftrightarrow\ x \leq -c\ \text{ó}\ c \leq x$

Estas propiedades se cumplen cuando x es sustituida por cualquier expresión algebraica. Resolvamos una desigualdad con valor absoluto.

Ejemplo 1. Resuelva la inecuación $|\mathbf{x} - \mathbf{5}| < \mathbf{2}$

Solución:

La desigualdad aplicando las propiedades de valor absoluto es equivalente a:

$-2 < x - 5 < 2$ → Aplicando la primera propiedad

$-2 + 5 < x < 2 + 5$ → Se procede a resolver la doble desigualdad como se explicó anteriormente. De tener dudas repasa ese punto de la guía

$3 < x < 7$ El conjunto solución es el intervalo $(3,7)$.

Ejemplo 2. Resuelva la inecuación $|\mathbf{3x} + \mathbf{2}| \geq \mathbf{4}$

Solución:

La desigualdad aplicando las propiedades de valor absoluto es equivalente a:

$3x + 2 \geq 4$ o $3x + 2 \leq -4$ → Aplicando la propiedad 4

$3x \geq 2$ o $3x \leq -6$ → Restamos 2 al lado derecho en ambas ecuaciones.

$x \geq \frac{2}{3}$ o $x \leq -2$ → Dividimos entre 3

El conjunto solución es el intervalo $(-\infty,-2] \cup \left[\frac{2}{3}, \infty\right)$.

ACTIVIDAD N°5.

__________ Apliquemos lo aprendido_________

I parte. Resuelva las inecuaciones con valor absoluto. Exprese su respuesta de forma gráfica y en intervalo.

1. $|x-1|>7$
2. $|2x-7|<9$
3. $4<|3x+12|$
4. $|3-4x|\geq 8$
5. $|7-3x|\leq 2$

II Parte. Aplicaciones a la vida diaria. Te invitamos a analizar las situaciones vinculadas a las inecuaciones y la vida diaria, obtenidas del Libro de Pre cálculo de Stewart[3].

a. **Intervalo de estatura:** el promedio de estatura de hombres adultos es de 68.2 pulgadas y 95% de ellos tiene una estatura que satisface la siguiente desigualdad:

$$\left|\frac{h-68.2}{2.9}\right|\leq 2$$

Resuelva la desigualdad para hallar el intervalo de estaturas.

Realice sus operaciones aquí↓

¡Genial!

Ha culminado el Tema 5.

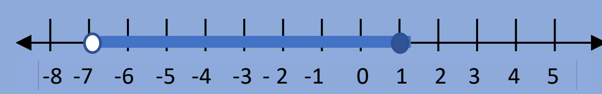
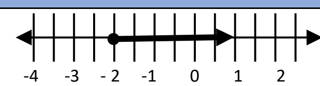
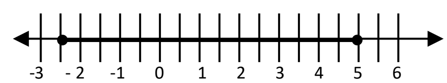
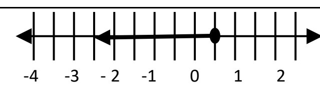
[3] Stewart, Redlin, Watson (2012). Pre cálculo, Matemáticas para el cálculo. Sexta Edición. ISBN: 978 – 607 – 481-826-0

RESPUESTA DE ACTIVIDAD N°1

I- 1. a 2. b 3. a. 4. b 5. b 6. C 7. b

II- Reconozca y aplique diferentes notaciones

Completa la siguiente tabla escribiendo el conjunto solución de los siguientes intervalos en las notaciones faltantes

Notación de intervalo	Notación de conjunto	Notación de desigualdad	Notación gráfica
$(-7,1]$	$\{x \in \mathbb{R}/-7 < x \leq 1\}$	$-7 < x \leq 1$	
$[-2,\infty)$	$\{x \in \mathbb{R};\ x \geq -2\}$	$x \geq -2$	
$[-2.5,5]$	$\{x \in \mathbb{R}/-2.5 \leq x \leq 5\}$	$-2.5 \leq x \leq 5$	
$(-\infty,\frac{1}{2}]$	$\left\{x \in \mathbb{R}\ /\ x \leq \frac{1}{2}\right\}$	$x \leq \frac{1}{2}$	

III- RELACIÓN A SITUACIONES COTIDIANAS.

1. $[0,18)$ 2. $[0,100)$ 3. $[40,59)$; $[20,39)$ 4. $[7:30\ ,9:30\ ]$ 5. $[100,\infty)$

6. $[3,5]$ 7. $[0,4.15]$

RESPUESTA DE ACTIVIDAD N°2

I. a) = b) > c) >

II. a) < b) < c) ≤ d) > e) >

III.

a) $x - 5 > 2$

$$x > 2 + 5$$
$$\boldsymbol{x > 7}$$ Intervalo solución: $(7, +\infty)$

b) $3x - 4 < x + 1$

$$3x - x < 1 + 4$$
$$2x < 5$$

$$\boldsymbol{x < \frac{5}{2}}$$ Intervalo solución: $\left(-\infty, \frac{5}{2}\right)$

c) $\frac{2}{3}x + 4 \leq 6$

$$3\left(\frac{2}{3}x\right) + 3(4) \leq 3(6)$$
$$2x + 12 \leq 18$$
$$2x \leq 18 - 12$$
$$2x \leq 6$$
$$x \leq \frac{6}{2}$$
$$\boldsymbol{x \leq 3}$$ Intervalo solución: $(-\infty, 3]$

d) $2(x-3) + 5 \geq 5 - x$

$$2x - 6 + 5 \geq 5 - x$$
$$2x - 1 \geq 5 - x$$
$$2x + x \geq 5 + 1$$
$$3x \geq 6$$
$$x \geq \frac{6}{3}$$
$$\boldsymbol{x \geq 2}$$ Intervalo solución: $[2, +\infty)$

e) $-1 \leq 7 - 2x < 3$

$$-1 \leq 7 - 2x < 3$$
$$-1 - 7 \leq 7 - 7 - 2x < 3 - 7$$
$$-8 \leq -2x < -4$$
$$\frac{-8}{-2} \geq \frac{-2x}{-2} > \frac{-4}{-2}$$
$$4 \geq x > 2$$
$$\boldsymbol{2 < x \leq 4}$$ Intervalo solución: $(2, 4]$

f) $-12 < \frac{3}{4}(2 - x) \leq 24$

$$-12(4) < (4)\left(\frac{3}{4}\right)(2 - x) \leq 24(4)$$
$$-48 < 3(2 - x) \leq 96$$
$$-48 < 6 - 3x \leq 96$$
$$-48 - 6 < 6 - 6 - 3x \leq 96 - 6$$
$$-54 < -3x \leq 90$$

$$\frac{-54}{-3} > \frac{-3x}{-3} \geq \frac{90}{-3}$$
$$18 > x \geq -30$$
$$\boldsymbol{-30 \leq x < 18}$$ Intervalo solución: $[-30, 18)$

g) $16 < 7 - 3x < 31$

$$16 < 7 - 3x < 31$$
$$16 - 7 < 7 - 7 - 3x < 31 - 7$$
$$9 < -3x < 24$$
$$\frac{9}{-3} > \frac{-3x}{-3} > \frac{24}{-3}$$
$$-3 > x > -8$$
$$\boldsymbol{-8 < x < -3}$$

Intervalo solución: $(-8, -3)$

h) $2 \leq 3x - 7 < 14$

$$2 + 7 \leq 3x - 7 + 7 < 14 + 7$$
$$9 \leq 3x < 21$$
$$\frac{9}{3} \leq \frac{3x}{3} < \frac{21}{3}$$
$$\boldsymbol{3 \leq x < 7}$$

Intervalo solución: $[3, 7)$

i) $\frac{x}{6} - \frac{1}{2} > \frac{2}{3} + x$

$$m.c.m.\ de\ los\ denominadores: 6$$

$$6\left(\frac{x}{6}\right) - 6\left(\frac{1}{2}\right) > 6\left(\frac{2}{3}\right) + 6(x)$$
$$1(x) - 3(1) > 2(2) + 6x$$
$$x - 3 > 4 + 6x$$
$$x - 6x > 4 + 3$$
$$-5x > 7$$
$$x < \frac{7}{-5}$$
$$\boldsymbol{x < -\frac{7}{5}}$$

Intervalo solución: $\left(-\infty, -\frac{7}{5}\right)$

j) $24 \leq \frac{2}{3}(x - 5) < 36$

$$(3)24 \leq (3)\frac{2}{3}(x - 5) < (3)36$$
$$72 \leq 2(x - 5) < 108$$
$$72 \leq 2x - 10 < 108$$
$$72 + 10 \leq 2x - 10 + 10 < 108 + 10$$
$$82 \leq 2x < 118$$
$$\frac{82}{2} \leq \frac{2x}{2} < \frac{118}{2}$$
$$\boldsymbol{41 \leq x < 59}$$

Intervalo solución: $[41, 59)$

k) $2x - 1 \leq 5 - 2x \leq 3x + 10$

$$\begin{gathered} 2x - 1 \leq 5 - 2x \\ 2x + 2x \leq 5 + 1 \\ 4x \leq 6 \\ x \leq \frac{6}{4} \\ x \leq \frac{3}{2} \end{gathered}$$

$$\begin{gathered} 5 - 2x \leq 3x + 10 \\ -3x - 2x \leq 10 - 5 \\ -5x \leq 5 \\ 5x \geq -5 \\ x \geq \frac{-5}{5} \\ x \geq -1 \end{gathered}$$

$\boldsymbol{-1 \leq x \leq \frac{3}{2}}$ Intervalo solución: $\left[-1, \frac{3}{2}\right]$

IV Parte. Aplicaciones a la vida diaria. (Libro Pre-cálculo de Stewart).

Plan B < Plan A

$$\begin{gathered} 5.00 + 0.12x < 25.00 + 0.05x \\ 0.12x - 0.05x < 25.00 - 5.00 \\ 0.07x < 20.00 \\ x < 20.00 \\ 0.07 \\ x < 285.71 \\ x < 286\ minutos \end{gathered}$$

Respuesta: *El Plan B será ventajoso hasta un máximo de 285 minutos de llamadas de larga distancia.*

a) $\mathbf{6\,400 < \boldsymbol{C} < 7\,000}$

$$\begin{gathered} \mathbf{6\,400 < 0,35\,\boldsymbol{m} + 2\,200 < 7\,000} \\ \mathbf{6\,400 - 2\,200 < 0,35\boldsymbol{m} + 2\,200 - 2\,200 < 7\,000 - 2\,200} \\ \mathbf{4\,200 < 0,35\,\boldsymbol{m} < 4\,800} \\ \mathbf{\frac{4\,200}{0,35} < \frac{0,35\,\boldsymbol{m}}{0,35} < \frac{4\,800}{0,35}} \\ \mathbf{12\,000 < \boldsymbol{m} < 13\,714} \end{gathered}$$

Respuesta: *Juana puede manejar su auto entre 12 000 millas y 13 714 millas, para cumplir su presupuesto anual en costos de manejo.*

RESPUESTA DE ACTIVIDAD N°3

I parte. Puntos Críticos. 1. $\{-5, 4\}$

2. $\left\{-\frac{6}{5}, 1\right\}$

3. $\left\{-\frac{1}{5}, \frac{1}{4}\right\}$

4. $\left\{\frac{2}{3}, \frac{3}{2}\right\}$

5. $\left\{-\frac{1}{a}\right\}$

6. $\left\{-\frac{3}{2}, -3\right\}$

7. $\left\{-\frac{3}{4}, -1\right\}$

8. $\left\{\frac{1}{2}, 3\right\}$

II - **1.** $\left(-\infty, -\frac{5}{6}\right) \cup (1, \infty)$

2. $(-\infty, -1] \cup [12, \infty)$

3. $\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{10}{3}, \infty\right)$

4. $(-\mathbf{2}, \mathbf{1})$ **5.** $(-\infty, -2) \cup \left(\frac{1}{2}, \infty\right)$

6. $(-5, 2)$ **7.** $[0, 10]$

8. $(-\infty, -3) \cup (1, \infty)$

RESPUESTA DE ACTIVIDAD N°4

1. $[4, 24]$ **2.** $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{7}{5}, \infty\right)$ **3.** $[-4, 2]$ **4.** $\left[-4, \frac{3}{2}\right]$
2. **5.** $[-1, 2] \cup [-5, \infty)$ **6.** $[-5, 0] \cup [3, \infty)$

RESPUESTA DE ACTIVIDAD N°5

1. $(-\infty, -6) \cup (8, \infty)$
2. **2.** $(-1, 8)$

3. $\left(-\infty, -\frac{16}{3}\right) \cup \left(-\frac{8}{3}, \infty\right)$

4. $\left(-\infty, -\frac{5}{4}\right] \cup \left[\frac{11}{4}, \infty\right)$

5. $\left[\frac{5}{3}, 3\right]$

AUTOEVALUACIÓN A-1

Estimados Alumnos(as): con el propósito de favorecer el desarrollo de la guía de aprendizaje, le presentamos la autoevaluación de la unidad 1.

La autoevaluación induce a que "los alumnos desarrollen el hábito de la reflexión, y la identificación de los propios errores, cuestión fundamental cuando se trata de formar personas con capacidad para aprender de forma autónoma". (Valero-García, M., & de Cerio, L. M. D. 2005, p.27)

La siguiente tabla debe ser completada al culminar todos los temas, evalúese y propóngase nuevas metas en el aprendizaje. Las preguntas van conectadas a una escala que usted considerará según el trabajo realizado hasta el momento. Esta evaluación es cualitativa.

- Al completar la unidad 1, autoevalúese según la siguiente escala de logros:

Lo he logrado	Lo estoy logrando	Estoy intentando lograrlo	No lo he Logrado
5	4	3	2

AL CONCLUIR LA UNIDAD 1, CONSIDERO QUE:	COLOQUE UN NÚMERO SEGÚN LA ESCALA
En la asimilación de todos los conceptos	
En la actitud positiva ante los retos al desarrollar los ejercicios	
En incrementar mi curiosidad por investigar y descubrir cosas nuevas	
En mejorar mi capacidad para resolver problemas	
En hacer buen uso de las TIC's para profundizar e investigar con las diferentes plataformas educativas	
En seguir las indicaciones y sugerencias de la guía de aprendizaje.	
En hacer buen uso del tiempo para resolver las tareas.	
En conectar los temas con la vida diaria	
TOTAL →	

2 | CÁLCULO DIFERENCIAL

TEMA 6. LAS FUNCIONES

Generalmente se hace uso de las funciones reales, (aun cuando el ser humano no se da cuenta), en el manejo de cifras numéricas en correspondencia con otra, debido a que se está usando subconjuntos de los números reales. Las funciones son de mucho valor y utilidad para resolver problemas de la vida diaria, problemas de finanzas, de economía, de estadística, de ingeniería, de medicina, de química y física, de astronomía, de geología, y de cualquier área social donde haya que relacionar variables.

Cuando se va al mercado o a cualquier centro comercial, siempre se relaciona un conjunto de determinados objetos o productos alimenticios con el costo en dólares para así saber cuánto podemos comprar; si lo llevamos al plano cartesiano, podemos escribir esta correspondencia en una ecuación de función "x" como el precio y la cantidad de producto como "y". El estudio de las funciones cuadráticas resulta de interés no solo en matemática sino también en física y en otras áreas del conocimiento, por ejemplo: la trayectoria de una pelota lanzada al aire, la trayectoria que describe un río al caer desde lo alto de una montaña, la forma que toma una cuerda floja sobre la cual se desplaza un equilibrista, el recorrido desde el origen, con respecto al tiempo transcurrido, cuando una partícula es lanzada con una velocidad inicial.

Una función es entonces una relación que existe entre dos magnitudes donde el valor de una depende de la otra. Como ya hemos explicado, te mostramos otros ejemplos:

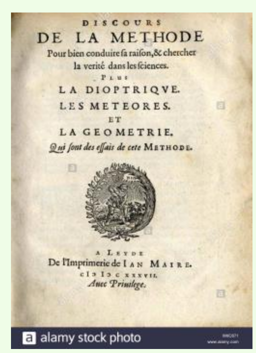
- El costo de una llamada depende de los minutos consumidos.
- La dosis de un medicamento depende del peso del individuo.
- La temperatura del día depende de la hora.

SABÍAS QUE…

La construcción de tablas numéricas para la astronomía y para cálculos aritméticos condujo - a una primera aproximación de las funciones, estableciendo el carácter de dependencia entre diferentes magnitudes.

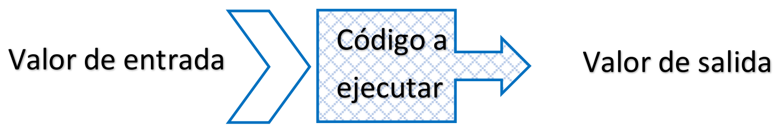
El término función fue usado por primera vez en 1637 por el matemático francés René Descartes para designar una potencia x^n de la variable x.

Si bien ya había logrado un gran reconocimiento como matemático - investigó ciertas cuestiones sobre la tangente- y como inventor de una máquina para tallar lentes, en 1633 escribió el Tratado de la paz o del mundo



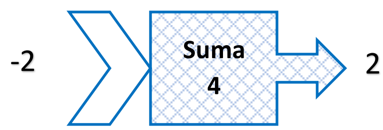
"ego cogito ergo sum" (pienso luego existo).
René Descartes.

Para facilitar la comprensión de este concepto, recurriremos a la idea de una caja mágica que transforma nuestros elementos de entrada en algo nuevo, dependiendo de las características que tenga nuestra caja.

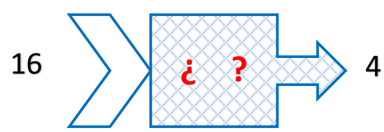


Ejemplo 1:

a) Supongamos que el código a ejecuta es sumar 4 y que nuestro valor de entrada es -2

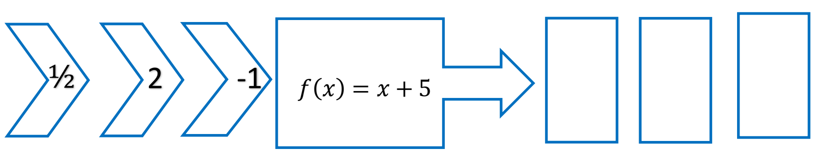


b) Supongamos ahora que nuestro valor de entrada es 16 y nuestro valor de salida es 4. Podría decir ¿cuál fue el código que se le introdujo a la máquina para obtener esta respuesta?



c) Como ya habrás podido deducir, este código de ejecución también puede ser escrito a través de expresiones algebraicas.

¿Qué resultados obtendríamos?



ACTIVIDAD N°6.1

__________ Apliquemos lo aprendido________

1. Utilizando la idea de la caja mágica, completa las casillas en blanco de acuerdo con el código que nos brindan.

VALOR DE ENTRADA	**CÓDIGO PARA EJECUTAR**	**VALOR DE SALIDA**
-6		
0		
$\frac{1}{2}$		
	Restar 9	6
	Multiplicar por 2 y sumar 5	9
	Dividir entre 3	5
	Sumar 4 y multiplicar por -5	19
2		8
$\frac{1}{3}$		$\frac{5}{6}$
20		32

- ## Definición de Función:

Antes de definir una función, te hablaremos de su utilidad: las funciones son utilizadas para representar mediante modelaje relaciones entre variaciones de magnitudes. De esta manera podemos cuantificar mediante fórmulas, las variaciones y predecir el comportamiento de los fenómenos[4]. Por ejemplo, en física el movimiento rectilíneo uniforme, en química las leyes de presión y volumen de los gases, en la economía.

Entonces podemos definir una función como:

> Una relación tal que a cada valor del dominio le corresponde uno y solo un valor del codominio y que se puede representar a través de una expresión algebraica, en un plano cartesiano o en una tabla de valores.

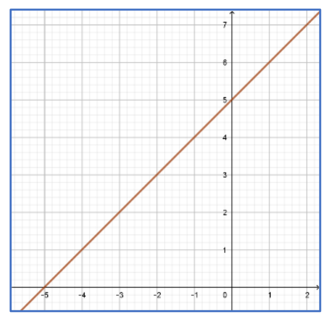
Expresión algebraica

$f(x) = x + 5$

Tabla de valores

x	-3	0	5
y	1	2	7

Plano cartesiano



En lenguaje matemático, al valor de **entrada se le llama**:

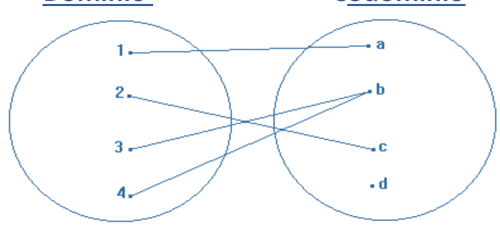
- **<u>Dominio</u>**: es el conjunto de todos los valores que puede tomar la variable independiente (x) en una función.

Y a los valores de **salida se les llama**:

- **<u>Codominio:</u>** es el conjunto de todos los valores que puede tomar la variable dependiente (y) en una función.

Gráficamente lo representamos de la siguiente manera:

<u>Dominio</u> **<u>Codominio</u>**



[4] Libro de matemáticas Alfa 8. Editorial Norma.

El proceso de determinar el valor de $f(x)$ para un valor de x determinado se le llama valorar la función, es decir el proceso de obtener el valor de salida se llama **<u>Valorización</u>**.

Ejemplo 1:

- **Si $f(x) = 3x^2 + 5x$ encontrar $f(3)$, $f(-2)$**

Solución:

- $f(3) = 3(3)^2 + 5(3) = 3(9) + 5(3) = 27 + 15 = 42$

  Entonces; $\boldsymbol{f(3) = 42}$

  Realizando el mismo procedimiento, tenemos que $\boldsymbol{f(-2) = 2}$

Ejemplo 2:

- **Si $f(x) = \sqrt{x+4}$ encontrar $f(5)$, $f(-3)$**

Solución:

- entonces $\boldsymbol{f(5) = 3}$
- entonces $\boldsymbol{f(-3) = 1}$

Ejemplo 3:

- **Si $f(x) = \frac{x+2}{2x+3}$ encontrar $f(-4)$**

Solución:

- entonces $\boldsymbol{f(-4) = \frac{2}{5}}$

Ejemplo 4:

- **Si $f(x) = 2\,sen\,2x$ encontrar $f(45°)$**

Solución:

- $f(45º) = 2\,sen\,2(45º) = 2\,sen\,90º = 2(1) = 2$ entonces $f(45°) = 2$

Ejemplo 5:

- **Si $f(x) = e^{x+3}$ encontrar $f(-3)$**

Solución:

- $f(x) = e^{(-3)+3} = e^0 = 1$ entonces $f(-3) = 1$

Ejemplo 6:

- **Si $f(x) = log(2x + 4)$ encontrar $f(48)$**

Solución:

- $f(48) = log\ (2(48) + 4 = log\ (96 + 4) = log\ 100 = 2$ entonces $f(48) = 2$

- Representación de una función

Existen varias formas de representar una función, entre estas tenemos:

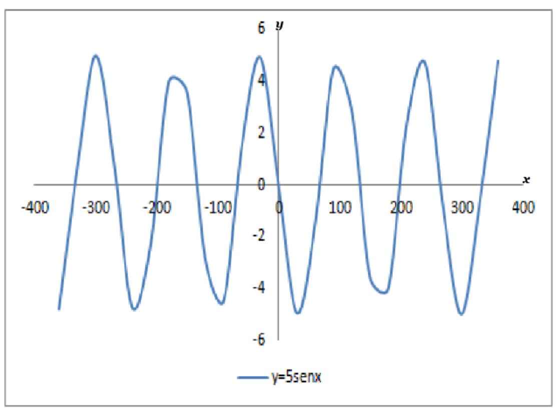
Verbal: $v(t)$, velocidad en el instante t del tiempo.

Algebraica: $A = \pi r^2$ área de un círculo

Numérica: por medio de tablas de valores

k	$C(k)$
0	1.073
1	1.133
5	1.373
10	1.673

Visual: por medio de gráficas.



ACTIVIDAD N°.6.2

__________ Apliquemos lo aprendido________

1. Encuentre en las siguientes funciones, los valores correspondientes en cada problema:

Ejercicios

1. $f(x) = 4$ encontrar $f(-5)$
2. $f(x) = 5x - 1$ encontrar $f\left(-\frac{2}{5}\right), f(2), f(0)$
3. Si $f(x) = 8x^2 - 5x + 3$ encontrar $f\left(-\frac{4}{3}\right), f(5)$
4. Si $f(x) = \sqrt{2x+7}$ encontrar $f(21), f(5)$
5. Si $f(x) = \frac{5x-2}{x+5}$ encontrar $f(4), f(-2), f(0)$
6. Si $f(x) = 2\,sen\,2x$ encontrar $f(45°), f(90°)$
7. Si $f(x) = 4\cos 2x$ encontrar $f(90°), f(-90°)$
8. Si $f(x) = e^{x+3}$ encontrar $f(0), f(-3), f(3)$
9. Si $f(x) = e^{-2x+4}$ encontrar $f(3), f(-4), f(0)$
10. Si $f(x) = log(2x+4)$ encontrar $f(3), f(48)$
11. Si $f(x) = log(x-2)$ encontrar $f(2.1), f(4)$

Respuestas

1. $f(-5) = 4$
2. $f(-\frac{2}{5}) = -3,\ f(2) = 9,\ f(0) = -1$
3. $f(-\frac{4}{3}) = \frac{215}{9},\ f(5) = 178$
4. $f(21) = 7,\ f(5) = 4.12$
5. $f(4) = 2,\ f(-2) = -4,\ f(0) = -\frac{2}{5}$
6. $f(45°) = 2,\ f(90°) = 0$
7. $f(90°) = -4,\ f(-90°) = -4$
8. $f(0) = 20.1,\ f(-3) = 1,\ f(3) = 403.4$
9. $f(3) = 0.1,\ f(-4) = 162754.8,\ f(0) = 54.6$
10. $f(3) = 1,\ f(48) = 2$
11. $f(2.1) = -1,\ f(4) = 0,3$

Realice sus operaciones aquí↓

2. Aplicaciones a la vida diaria. Tomadas del Libro de Pre cálculo de Stewart[5]

a. Costo de Producción. El costo C en dólares por producir x yardas de cierta tela esta dado por la función $C(x) = 1500 + 3x + 0.02x^2 + 0.0001x^3$

- Encuentre $C(10)$, y $C(100)$
- ¿Qué representan sus respuestas anteriores?
- Encuentre $C(0)$. (este número representa los costos fijos)

b. Peso de una astronauta. Si una astronauta pesa 130 libras en la superficie de la tierra, entonces su peso cuando esté a h millas sobre la tierra está dado por la función $w(h) = 130\left(\frac{3960}{3960+h}\right)^2$

- ¿cuál es su peso cuando ella esté a 100 millas sobre la tierra?
- Construye una tabla de valores para la función w que da el peso de la astronauta a altitudes de 0 a 500 millas. ¿qué se concluye a partir de la tabla?

Realice sus operaciones aquí↓

¡Genial!

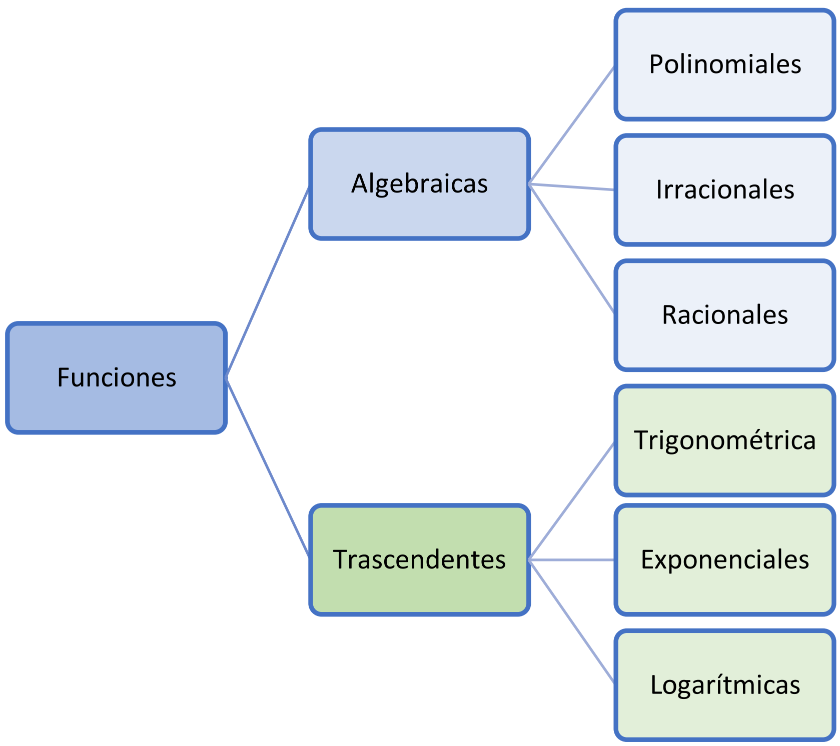
Ha culminado el Tema 6.

[5] Stewart, Redlin, Watson. (2012) **Pre cálculo. Matemáticas para el cálculo.** Sexta Edición. Cengage Learning

TEMA 7. FUNCIONES

La gráfica de una función, que nos da una imagen de su comportamiento, está definida como el conjunto de pares ordenados $\{(x, f(x))/x \in A\}$ localizados en un plano cartesiano. Para realizarlas, generalmente hacemos una tabla de valores para ubicar los puntos en el plano cartesiano, luego los unimos para obtener nuestra gráfica.

Para estar seguros de que nuestra gráfica representa una función, podemos trazar una recta vertical sobre esta, si la recta solo la corta en un punto es una función, pero si la recta la corta en más de un punto entonces nuestra grafica no representa una función.
Las funciones se pueden clasificar en:



Según el tipo de operaciones que se tienen que realizar para obtener sus valores, se clasifican en algebraicas y trascendentes:

- Las funciones algebraicas se refieren a aquellas cuya regla de correspondencia puede ser expresada por medio de un polinomio, una expresión racional (cociente de dos polinomios) o una expresión irracional (forma radical).

- Las funciones trascendentes se refieren a las funciones cuya regla de correspondencia NO es algebraica.

7.1 FUNCIÓN LINEAL

a) Función constante

Es un caso especial de la función lineal donde la pendiente es cero, m=0. Su expresión analítica es $\boldsymbol{f(x) = c,\ c} \in \mathbb{R}$ siendo un número determinado donde todos los valores de salida son iguales a ese número. Su gráfica es una recta horizontal.

- El **dominio** son todos los números reales.
  - $\boldsymbol{D_f = \mathbb{R}}$
- El **codominio** es un solo número.

$$\boldsymbol{C_f = c}$$

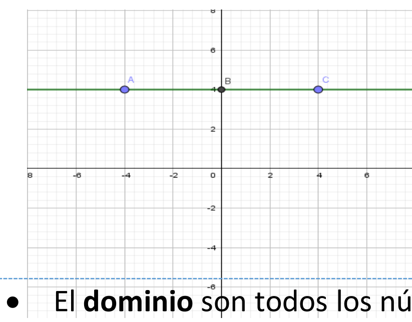
- La **gráfica** es una **recta horizontal.**

Ejemplo 1:

$$\boldsymbol{f(x) = 4}$$

$D_f = \mathbb{R}$ $\quad C_f = 4$

x	-4	0	4
y	4	4	4



b) Función lineal

Una función de la forma $\boldsymbol{f(x) = m\,x + b}$ se denomina función lineal, su gráfica es una línea recta con pendiente (inclinación) m e intersección con el eje de las y en b, es decir el punto $(0, b)$.

Si $m > 0$ la función es creciente.

Si $m < 0$ la función es decreciente

- El **dominio** son todos los números reales.

$$\boldsymbol{D_f = \mathbb{R}}$$

- El **codominio** son todos los números reales.

$$\boldsymbol{C_f = \mathbb{R}}$$

Ejemplo 2:

Determina los principales elementos y traza la gráfica para la siguiente función:

$$\boldsymbol{f(x) = 2\,x + 2}$$

Solución:

$\boldsymbol{D_f = \mathbb{R}}$ $\quad m = 2$ es positiva función creciente

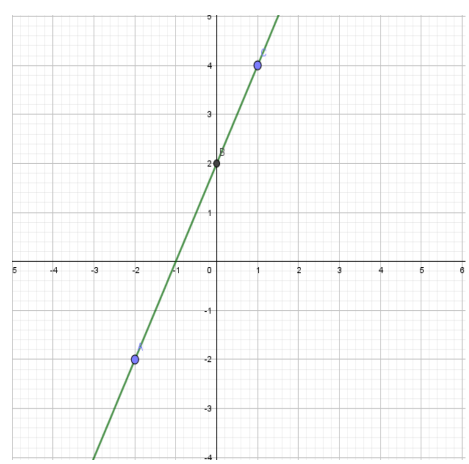
$\boldsymbol{C_f = \mathbb{R}}$

Ordenada en el origen 2 →(0,2)

Tabla de valores

x	-2	0	1
y	-2	2	4

- La **gráfica** es una **recta.**



ACTIVIDAD N°.7

Apliquemos lo aprendido

I- Realice cada ejercicio de forma ordenada.

1.Dada la función: $f(x) = x + 2$. Determine:

a) Dominio de la función ___________

b) Rango de la función ___________

c) Ordenada en el origen $b =$ ___________

d) Par ordenado Correspondiente a la intersección con el eje y (___,___)

e) Pendiente $m =$ ___________

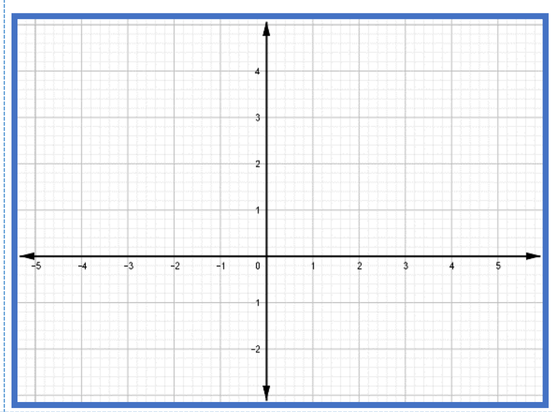
f) Según m es: Creciente o decreciente ___________

Analice las componentes de los puntos en el eje de las x, luego determina la intersección con el eje x . Sugerencia $y = 0$

Complete la tabla con los puntos ya encontrados, para graficar la función lineal con dos puntos será suficiente. Le animamos a buscar un punto más perteneciente a la función.

x			
y			

- **Gráfica**



2. Dada la función $f(x) = -\frac{1}{2}x$ Determine:

g) Dominio de la función ___________

h) Rango de la función ___________

i) Ordenada en el origen $b =$ ___________

j) Par ordenado Correspondiente a la intersección con el eje y (___,___)

k) Pendiente $m =$ ___________

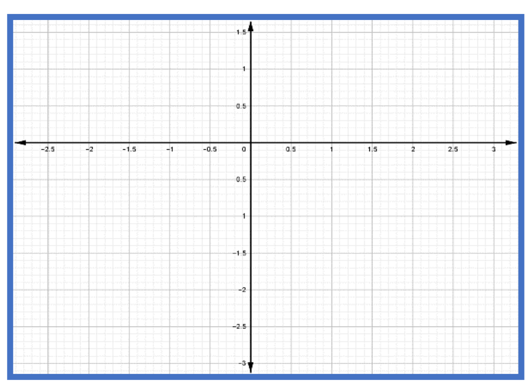
l) Según m es: Creciente o decreciente ___________

Analice las componentes de los puntos en el eje de las x, luego determina la intersección con el eje x . Sugerencia $y = 0$

Complete la tabla con los puntos ya encontrados, para graficar la función lineal con dos puntos será suficiente. Le animamos a buscar un punto más perteneciente a la función.

x			
y			

- **Gráfica**



3. Dada la función $g(x) = -3x + 4$ Determine:

Complete la tabla con los puntos ya encontrados, para graficar la función lineal con dos puntos será

m) Dominio de la función ___________

n) Rango de la función ___________

o) Ordenada en el origen $b =$ ___________

p) Par ordenado Correspondiente a la intersección con el eje y (___,___)

q) Pendiente $m =$ __________

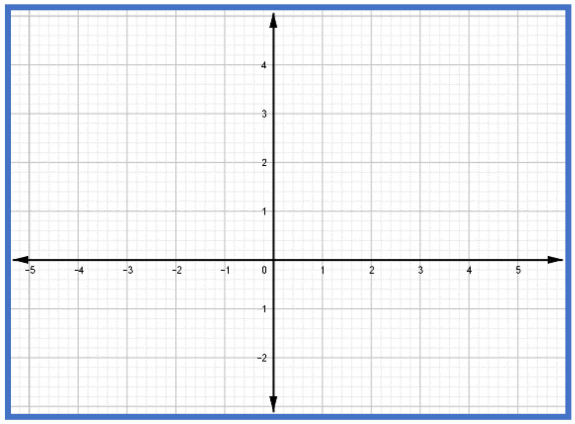
r) Según m es:
Creciente o decreciente ___________

Analice las componentes de los puntos en el eje de las x, luego determina la intersección con el eje x . Sugerencia $y = 0$

suficiente. Le animamos a buscar un punto más perteneciente a la función.

x			
y			

- **Gráfica**

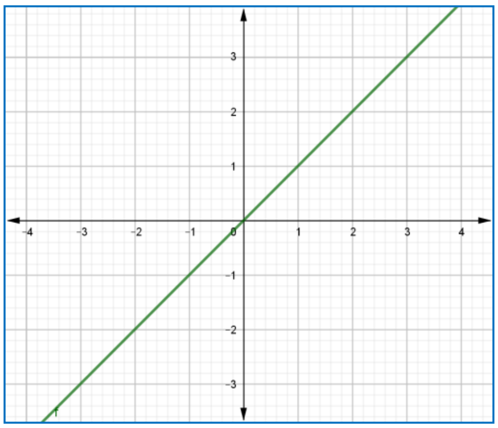


Realice sus operaciones aquí↓

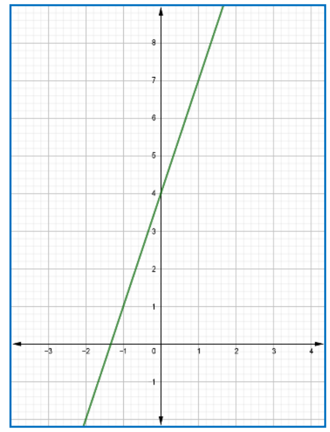
II-Actividad basada en [Which One Doesn't Belong?]

Para cada tarjeta encuentra una razón por la cual se puede considerar es un intruso en el grupo de las tarjetas.

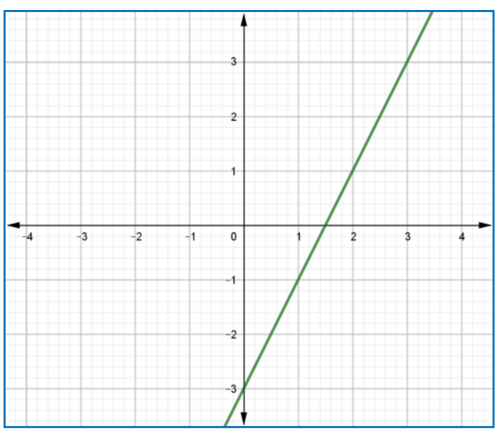
Tarjeta 1



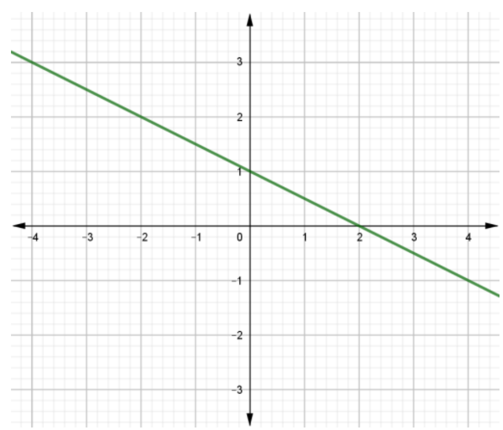
Tarjeta 2



Tarjeta 3



Tarjeta 4



¡Genial!

Ha realizado la actividad 7.1

7.2. FUNCIÓN CUADRÁTICA

Función cuadrática

Es una función polinomial de grado dos. Su escritura característica es:

$f(x) = a\,x^2 + b\,x + c, \quad a \neq 0,$ pero también la podemos encontrar escrita como: $f(x) = a(x-h)^2 + k$ donde $V(h,k)$

Aspectos importantes:

- $a > 0$ concavidad hacia arriba.
- $a < 0$ concavidad hacia abajo.
- El dominio son todos los *números* reales.
  $D_f = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$
- *Vértice:* $\left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac-b^2}{4a}\right)\left(-\frac{b}{2a}\ , f\left(-\frac{b}{2a}\right)\right)$
- Posee intervalos creciente y decreciente.
- El valor Máximo o Mínimo de una función cuadrática se presenta en $x = -\frac{b}{2a}$, de aquí:
  - Si $a > 0$ entonces tendrá un valor mínimo y será $f\left(-\frac{b}{2a}\right)$,
  - Si $a < 0$ entonces tendrá un valor máximo y será $f\left(-\frac{b}{2a}\right)$.
- La intersección con el eje y se da cuando $x = 0$, por tanto, en $(0, c)$
- Su representación gráfica es una parábola de eje de simetría vertical.
- El eje de simetría corresponde a $x = -\frac{b}{2a}$
- Si $a < 0$ entonces el codominio son los valores menores e iguales "≤" al valor de la "y "del vértice:

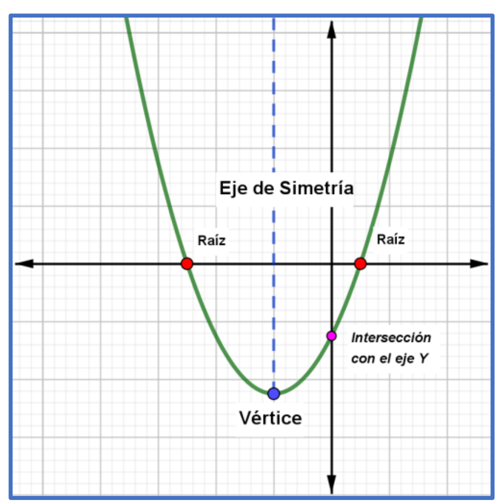
  $C_f = (-\infty, y_{\text{vértice}}]$

- Si $a > 0$ entonces el codominio son los valores mayores e iguales "≥ "al valor de la " y "del vértice:
  $C_f = [y_{\text{vértice}}, \infty)$

- La intersección con el eje x (raíces de la función) corresponde a un par ordenado, donde $y = 0$.
  Para determinar los valores de x que satisfacen la ecuación:
  $ax^2 + bx + c = 0$; se puede hacer uso de la fórmula,

  $$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a},$$

  la misma puede tener: dos raíces reales, una raíz real (de multiplicidad 2) o no tener raíces reales.



Ejemplo 1:
Determine los principales elementos y trace la gráfica para la siguiente función:

$$f(x) = -2\,x^2 + 5\,x - 2$$

Solución:

....

Dominio: $D_f = \mathbb{R}$

....

$a = -2 \quad b = 5 \quad c = -2$

$a < 0$ concavidad hacia abajo.

....

Vértice $\left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac-b^2}{4a}\right)$

$$V\left(-\frac{5}{2(-2)}, \frac{4(-2)(-2)-(5)^2}{4(-2)}\right)$$

$$V\left(-\frac{5}{-4}, \frac{16-25}{-8}\right)$$

$$V\left(\frac{5}{4}, \frac{-9}{-8}\right) = V\left(\frac{5}{4}, \frac{9}{8}\right)$$

....

Como $a < 0$ la función posee un máximo en $f\left(\frac{5}{4}\right) = \frac{9}{8}$.

....

Intersección con el eje y, se da cuando $x = 0$

$$f(0) = -2\,(0)^2 + 5\,(0) - 2 = -2, \rightarrow (0, -2)$$

....

Eje de simetría $x = \frac{5}{4}$.

....

Tabla de Valores

x	0	½	5/4	2	5/2
y	-2	0	9/8	0	-2

La intersección con el eje x, se da cuando $y = 0$; donde $0 = -2x^2 + 5x - 2$.

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$x_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{(5)^2-4(-2)(-2)}}{2(-2)}$$

$$x_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{25-16}}{-4}$$

$$x_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{9}}{-4}$$

$x_{1,2} = \frac{-5 \pm 3}{-4} \rightarrow$ Donde;

$$x_1 = \frac{-5+3}{-4} = \frac{-2}{-4} = \frac{1}{2} \rightarrow \left(\frac{1}{2}, 0\right)$$

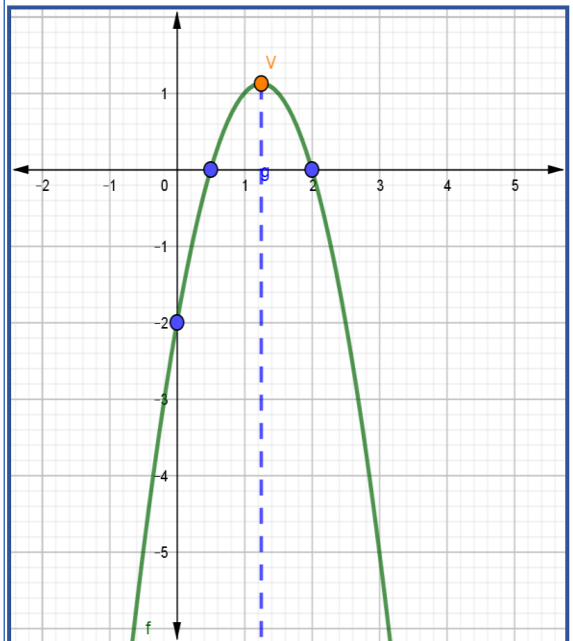
$$x_2 = \frac{-5-3}{-4} = \frac{-8}{-4} = 2 \rightarrow (2,0)$$

....

Codominio: $\left(-\infty, \frac{9}{8}\right]$

....

Gráfica



Ejemplo 2:

Determina los principales elementos y traza la gráfica para la siguiente función:

$$f(x) = 3\,x^2 + 5\,x - 2$$

Solución

$D_f = \mathbb{R} \qquad C_f = \left[-\frac{49}{12}, \infty\right)$

....

$a = 3 \quad b = 5 \quad c = -2$

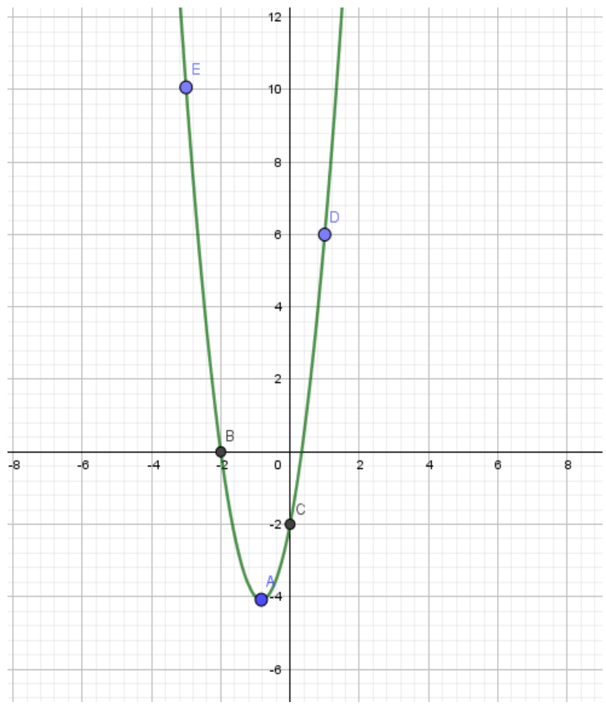
Vértice $\left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac-b^2}{4a}\right)$

$$V\left(-\frac{5}{2(3)}, \frac{4(3)(-2)-5^2}{4(3)}\right)$$

$$V\left(-\frac{5}{6}, \frac{-24-25}{12}\right)$$

$$V\left(-\frac{5}{6}, \frac{-49}{12}\right)$$

....



Valor mínimo:

$$f\left(-\frac{5}{6}\right) = 3\left(-\frac{5}{6}\right)^2 + 5\left(-\frac{5}{6}\right) + 2$$

$$f\left(-\frac{5}{6}\right) = -\frac{49}{12}$$

Tabla de Valores

x	-3	-2	-5/6	0	1
y	10	0	- 49/12	-2	6

Ejemplo 3:

Determina los principales elementos y traza la gráfica para la siguiente función:

$f(x) = 3x^2 - 2x + 5$

Solución

....

Dominio : $D_f = (-\infty, \infty)$

....

$a = 3 \quad b = -2 \quad c = 5$

$a > 0$ **concavidad hacia arriba**

Intersección con el eje x, se da cuando $y = 0$

$$0 = 3x^2 - 2x + 5$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x_{1,2} = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4(3)(5)}}{2(3)}$$

$$x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 60}}{6}$$

$$x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{-56}}{6}$$

Toma Nota

....

Vértice $\left(-\frac{b}{2a},\frac{4ac-b^2}{4a}\right)$

$$V(-\frac{b}{2a},\frac{4ac-b^2}{4a})$$

$$x=-\frac{-2}{2(3)}=+\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$$

$$y=\frac{4(3)(5)-(-2)^2}{4(3)}=\frac{60-4}{12}=\frac{56}{12}=\frac{14}{3}\rightarrow$$

$$V\left(\frac{1}{3},\frac{14}{3}\right)$$

Otra forma de determinar la coordenada y

$$f\left(\frac{1}{3}\right)=3\left(\frac{1}{3}\right)^2-2\left(\frac{1}{3}\right)+5=\frac{14}{3}$$

....

Como $a>0$ la función posee un mínimo en $f\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{14}{3}$.

....

Intersección con el eje y, se da cuando $x=0$

$$f(x)=3x^2-2x+5\rightarrow\ f(0)=5\rightarrow(0,5)$$

....

Eje de simetría $x=\frac{1}{3}$.

....

No corta al eje de las x (la función no posee raíces reales), (discriminante negativa, en los números reales no hay solución para raíces de índice par y cantidad subradical negativa)

....

Codominio : $\left[\frac{14}{3},\infty\right)$

....

Gráfica

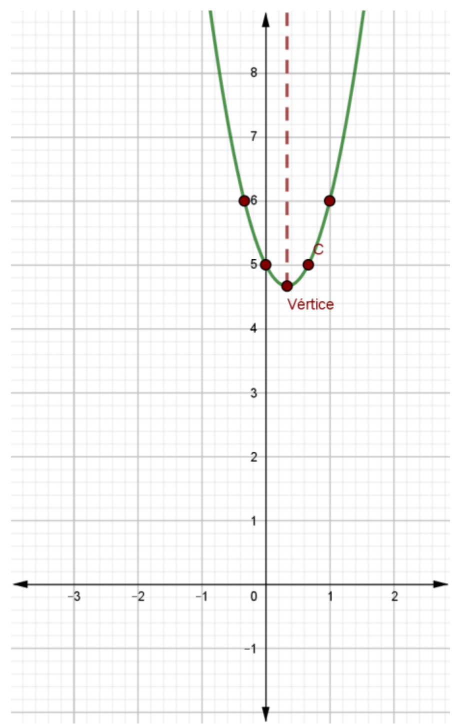


Tabla de Valores

x	$-\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	1
y	6	5	$\frac{14}{3}$	5	6

ACTIVIDAD N°.7.2

__________ Apliquemos lo aprendido_________

Determine lo solicitado para cada función, sea ordenado al desarrollar la actividad

I-En las siguientes funciones identifica el valor de $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ y $\boldsymbol{c}$

- $g(x) = 3x + 1 - 2x^2$ $\quad \boldsymbol{a} =$ _____ $\quad \boldsymbol{b} =$ _____ $\quad \boldsymbol{c} =$ _____
- $y = 2x^2 + 8$ $\quad \boldsymbol{a} =$ _____ $\quad \boldsymbol{b} =$ _____ $\quad \boldsymbol{c} =$ _____
- $h(x) = 2x^2 - 5x + 4$ $\quad \boldsymbol{a} =$ _____ $\quad \boldsymbol{b} =$ _____ $\quad \boldsymbol{c} =$ _____

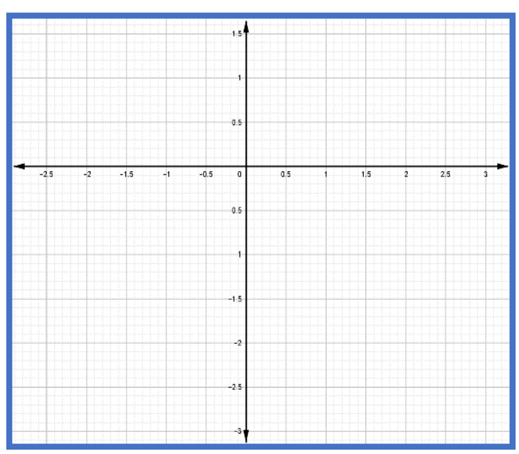
II-Determina hacia donde dirige la concavidad cada una de las siguientes funciones cuadráticas justifica esto atendiendo al parámetro a, para cada caso indica si la función presenta un máximo o mínimo.

Función	Concavidad	Justificación	Posee un máximo o Mínimo
$f(x) = 2x^2 - 3x + 1$	________________	________________	________________
$g(x) = -\frac{1}{3} - 2x + 6$	________________	________________	________________
$h(x) = x^2 + 6x + 5$	________________	________________	________________

III-En las siguientes funciones cuadráticas determina si tiene intersecciones con el eje x (raíces reales de la función), si tiene indique cuál o cuáles son:

$f(x) = x^2 + 6x + 9$	$f(x) = -2x^2 - 3x - 5$

IV-Determina para la siguiente función cada uno de los elementos que se solicitan en la tabla que aparece a continuación.

<table>
<tr><td colspan="3">$\boldsymbol{f(x) = 2x^2 + 3x + 1}$</td></tr>
<tr><th>Elemento</th><th>Resultado</th><th>Vértice de la función</th></tr>
<tr><td>Valor de los parámetros</td><td>$\boldsymbol{a} =$ ______ $\boldsymbol{b} =$ _____
$\boldsymbol{c} =$ ______</td><td rowspan="6"></td></tr>
<tr><td>Dominio de la función</td><td></td></tr>
<tr><td>Codominio o Rango de la función</td><td></td></tr>
<tr><td>Dirige su concavidad hacia</td><td></td></tr>
<tr><td>Eje de Simetría</td><td></td></tr>
<tr><td>Posee un puno máximo o mínimo</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">Intersección con el eje y, se da cuando $x = 0$</td><td rowspan="2">Gráfica
</td></tr>
<tr><td colspan="2">Intersección con el eje x, se da cuando $y = 0$</td></tr>
</table>

7.3 FUNCIÓN RACIONAL

Son funciones de la forma	Aspectos importantes:
$f(x) = \frac{h(x)}{g(x)}$ donde $h(x)$ y $g(x)$ son polinomios además $g(x) \neq 0$. El dominio son todos los números reales excepto los valores que hacen 0 el polinomio del denominador $g(x)$, es decir: $D_f = \mathbb{R} - \{x \in \mathbb{R} / \ g(x) = 0 \}$	Una función racional que no posee factores comunes en los polinomios que la forman, tendrá rectas que nos ayudan en su trazado llamadas asíntotas, las mismas orientan sobre el comportamiento de la función en sus cercanías.

Asíntota Vertical: ocurren en los valores que hacen cero al polinomio del denominador, tendrá la forma $x = a$, siendo a un valor que anula al polinomio del denominador.

Asíntota horizontal: Para determinarla seguiremos la siguiente regla:
Sea m el grado del polinomio del numerador y n el grado del polinomio del denominador.

- Si $m < n$ entonces la recta $y = 0$ es la Asíntota horizontal
- Si $m = n$ entonces la recta $y = \frac{a_m}{b_n}$ es la Asíntota horizontal siendo a_m el coeficiente del término de mayor potencia en el numerador y b_m el coeficiente del término de mayor potencia en el denominador.
- Si $m < n$ entonces no tiene Asíntota horizontal

El codominio se determinará por medio del gráfico.
Si $x = 0$ pertenece al dominio de la función racional, entonces la función tendrá intersecc
ión con el eje y en $f(0)$.

Si tiene intersección con el eje x, esta se da en los valores que hacen que el polinomio del numerador en la función racional reducida, $f(x) = \frac{h(x)}{g(x)}$, de cero; es decir $h(x) = 0$.

Ejemplo 1: Determine los principales elementos y traza la gráfica para la siguiente función:

$$f(x) = \frac{x}{x-2}$$

Solución

Para determinar el dominio, se debe tener presente que la función no está definida cuando el denominador vale cero.

$$\boldsymbol{x - 2 = 0}$$
$$\boldsymbol{x = 2}$$
$$\boldsymbol{D_f} = \mathbb{R} - \{\, \boldsymbol{2} \,\}$$
$$\boldsymbol{C_f} = \mathbb{R} - \{\, \boldsymbol{1} \,\}$$

…………………………………………….

Intersección con el eje $\boldsymbol{y}$, se da para $\boldsymbol{x = 0}$

$\boldsymbol{f(0)} = \frac{\boldsymbol{0}}{\boldsymbol{0-2}} = \frac{\boldsymbol{0}}{\boldsymbol{-2}} = \boldsymbol{0} \rightarrow (\boldsymbol{0}, \boldsymbol{0})$.

Asíntota Vertical

$$\boldsymbol{x - 2 = 0}$$
$$\boldsymbol{x = 2}$$

………………………………….

Asíntota Horizontal

El grado de $h(x)$ es uno y el grado de $q(x)$ es uno, de donde tenemos que los grados son iguales, por lo tanto, se tiene que la recta

$$y = \frac{a_m}{b_n}$$

es una asíntota horizontal

$$y = \frac{1}{1} = 1$$

La intersección con el eje x, se da para $y = 0$

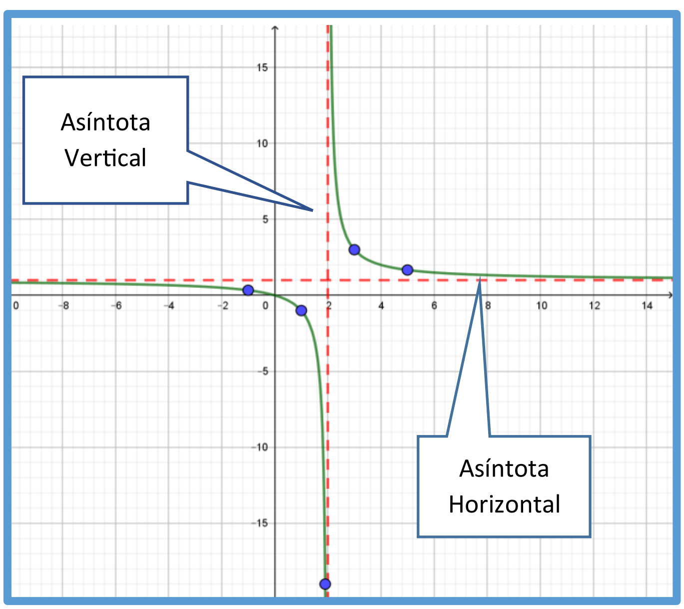
$$0 = \frac{x}{x-2}$$

$x = 0 \rightarrow (0{,}0)$

…………………………………………….

Tabla de Valores

x	-1	1	1.9	2.1	3	5
y	1/3	-1	-19	21	3	5/3



7.4 FUNCIÓN IRRACIONAL

Sea $\boldsymbol{f(x) = \sqrt{g(x)}}$

Se estudiará solo para cuando la cantidad subradical $g(x)$ es una expresión de primer grado, es decir $g(x) = bx + c$

- El **dominio** será el conjunto formado por todos los valores que resulten al resolver $g(x) \geq 0$, el mismo tendrá una de las siguientes formas.

  Df = $\left[-\frac{c}{b}, \infty\right)$ **o** **Df =** $\left(-\infty, -\frac{c}{b}\right]$

- El **codominio** son todos los reales positivos incluyendo el cero.

  Cf = $[0, \infty)$

- La **gráfica** es una semi parábola de eje de simetría horizontal. Su vértice será el punto $\left(-\frac{c}{b}, 0\right)$.

Ejemplo 1: Dada la función $f(x) = \sqrt{2x - 1}$

Dominio de la función

$2x - 1 \geq 0$

$2x \geq 1$

$x \geq$ ½ Df = $\left[\frac{1}{2}, \infty\right)$

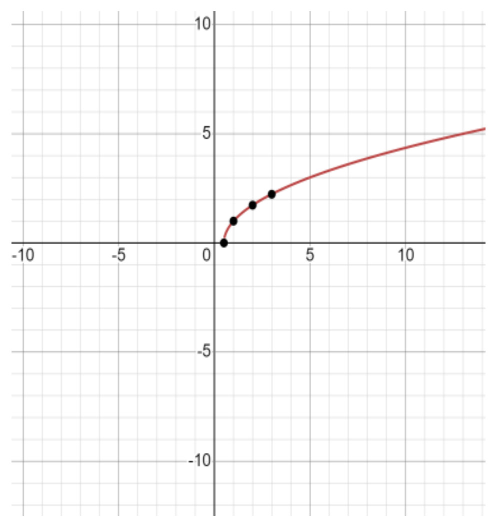
………………………………………………

Cf = $[0, \infty)$

…………………………………………………….

Tabla de valores

x	**1/2**	1	2	3
y	0	1	1.73	2.23



7.5 FUNCIÓN VALOR ABSOLUTO

Dada la function

$$\boldsymbol{f(x) = |g(x)|}$$

Se estudiará funciones con valor absoluto solo para cuando la cantidad dentro del valor absoluto es una expresión de primer grado.

- El **dominio** son todos los números reales.
  Df = $\mathbb{R}$
- El **codominio** son todos los reales positivos incluyendo el cero.
- **Cf =** $[0, \infty)$
- La **gráfica** tiene la forma de una V, abierta hacia arriba cuando el signo que anteceda el valor absoluto es positivo.

Ejemplo 1:

$$f(x) = |2x - 4|$$

D_f = $\mathbb{R}$

C_f = $[0, \infty)$

Para determinar el vértice se iguala a cero la expresión lineal dentro del valor absoluto y así se habrá determinado la abscisa del vértice que origina la gráfica.

$$2x - 4 = 0$$
$$2x = 4$$
$$x = \frac{4}{2}$$
$$x = \mathbf{2}$$

Para determinar la ordenada se evalúa la abscisa en la función

$$f(2) = |2(2) - 4| = 0$$

Vértice de la gráfica valor absoluto $V(2{,}0)$

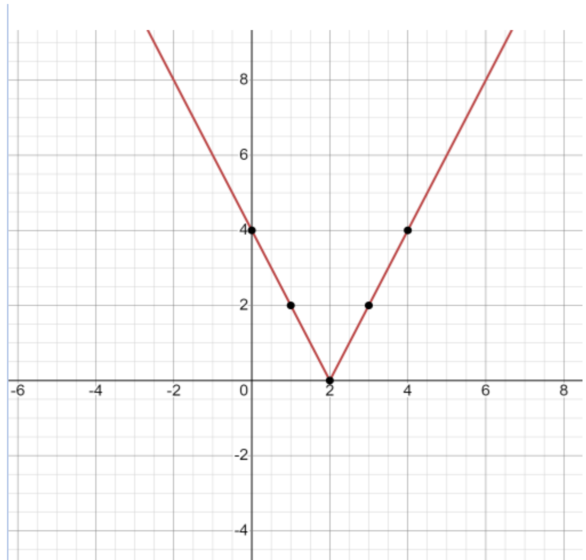


Tabla de valores

x	0	1	**2**	3	4
y	4	2	0	2	4

Apliquemos lo aprendido

Es una buena oportunidad para experimentar con la tecnología y los programas de geometría dinámica son una excelente opción. Te invitamos a visitar la siguiente dirección y observar el comportamiento de las funciones:

https://www.geogebra.org/classic/admgddhg

TEMA 8. OPERACIONES CON FUNCIONES

Después que usted ha comprendido el concepto de función en los ejemplos anteriores, ahora en esta sesión estudiaremos algunas de las operaciones que se pueden realizar cuando trabajamos con funciones. Veremos que, al igual que los números, se pueden sumar, restar, multiplicar y dividir; así como obtener su dominio.

Si sabe cómo realizar las cuatro operaciones básicas en polinomios, entonces también puedes sumar, restar, multiplicar y dividir funciones

❖ FUNCIÓN SUMA:

Si f y g son funciones: Su suma f + g es la función definida por:

$$(\boldsymbol{f}+\boldsymbol{g})(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})+\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})$$

Dominio: los números comunes a ambos dominios de $\boldsymbol{f}$ y $\boldsymbol{g}$.

-

❖ FUNCIÓN DIFERENCIA:

Si f y g son funciones: Su diferencia f – g es la función definida por:

$$(\boldsymbol{f}-\boldsymbol{g})(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})$$

Dominio: los números comunes a ambos dominios de $\boldsymbol{f}$ y $\boldsymbol{g}$.

La resta sigue el mismo proceso. Siempre y cuando recuerde cómo restar un polinomio de otro, puede restar una función de otra.

EJEMPLO 1: Dadas las funciones: $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}^2 + 5\boldsymbol{x} - 4$ y $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) = 3\boldsymbol{x}^2 - 7\boldsymbol{x} - 3$ determine $(\boldsymbol{f}+\boldsymbol{g})(\boldsymbol{x})$ **y** $(\boldsymbol{f}-\boldsymbol{g})(\boldsymbol{x})$

Solución:

a. La adición de las funciones es:

$(\boldsymbol{f}+\boldsymbol{g})(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})+\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})$

$= (\boldsymbol{x}^2 + 5\boldsymbol{x} - 4 + 3\boldsymbol{x}^2 - 7\boldsymbol{x} - 3)$ → Identifique $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ y $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})$. Reemplace $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ y $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})$

$= 4\boldsymbol{x}2 - 2\boldsymbol{x} - 7$ → Sume y combine los términos semejantes.

Como $\boldsymbol{D}(\boldsymbol{f}) = \mathbb{R}$ y $\boldsymbol{D}(\boldsymbol{g}) = \mathbb{R}$, tenemos que: $\boldsymbol{D}(\boldsymbol{f}+\boldsymbol{g}) = \boldsymbol{D}(\boldsymbol{f}) \cap \boldsymbol{D}(\boldsymbol{g}) = \mathbb{R}$

b. La sustracción de las funciones es:

$(f-g)(x)=f(x)-g(x)$

$= (\boldsymbol{x}^2 + 5\boldsymbol{x} - 4) - (3\boldsymbol{x}^2 - 7\boldsymbol{x} - 3)$ → Identifique $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ $\boldsymbol{y}$ $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})$. Reemplace $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ $\boldsymbol{y}$ $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})$

$= \boldsymbol{x}^2 + 5\boldsymbol{x} - 4 - 3\boldsymbol{x}^2 + 7\boldsymbol{x} + 3$ → **Cambie de signo paréntesis precedido del signo menos**

$= -2\boldsymbol{x}^2 + 12\boldsymbol{x} - 1$ → Sume y combine los términos semejantes.

Como $\boldsymbol{D}(\boldsymbol{f}) = \mathbb{R}$ y $\boldsymbol{D}(\boldsymbol{g}) = \mathbb{R}$, tenemos que: $\boldsymbol{D}(\boldsymbol{f}-\boldsymbol{g}) = \boldsymbol{D}(\boldsymbol{f}) \cap \boldsymbol{D}(\boldsymbol{g}) = \mathbb{R}$

También se puede realizar operaciones entre dos o más funciones. **Observe el siguiente ejemplo.**

EJEMPLO 2: Dadas las siguientes funciones; calcular las operaciones que se piden.

1. $f(x) = -3x^2 - 6x + 3$
2. $g(x) = -x + 2$
3. $h(x) = 4x^3 - 5x^2 - 7x + 13$

a. $(h - f)(x)$ b. $(h + g + f)(x)$ c. $(h - g + f)(x)$ d. $(f + h)(x)$ e. $(g - h)(x)$

Solución:

a. $(h - f)(x) = (4x^3 - 5x^2 - 7x + 13) - (-3x^2 - 6x + 3)$

$= 4x^3 - 5x^2 - 7x + 13 + 3x^2 + 6x - 3 \rightarrow$ **Recuerde cambio de signo**

$= 4x^3 - 2x^2 - x + 10$

b. $(h + g + f)(x) = (4x^3 - 5x^2 - 7x + 13) + (-x + 2) + (-3x^2 - 6x + 3)$

$= 4x^3 - 8x^2 - 13x + 18 \rightarrow$ **Sumando y restando términos semejantes**

c. $(h - g + f)(x) = (4x^3 - 5x^2 - 7x + 13) - (-x + 2) + (-3x^2 - 6x + 3)$

$= 4x^3 - 5x^2 - 7x + 13 + x - 2 - 3x^2 - 6x + 3$

$= 4x^3 - 8x^2 - 12x + 14$

¿Cuáles serán los dominios?

a.

b.

c.

Resuelva usted la d y e, recuerde observar el orden de las funciones y el cambio de signos cuando el paréntesis está precedido del signo menos.

d. $(f + h)(x) =$

e. $(g - h)(x) =$

EJEMPLO 3: Dadas las funciones $\boldsymbol{f\ (x)\ y\ \ g(x)}$, vamos a hallar $\boldsymbol{(f\ +\ g)(x)}$:

a. $f(x) = x - 5 \quad ; \quad g(x) = \frac{5}{x+1}$

Solución: $(f+g)(x)$= $f(x) + g(x)$ = $(x-5)$+$(\frac{5}{x+1})$ → Busque el MCM

$= \frac{(x-5)(x+1)+5}{x+1}$

= $\frac{x^2-4x}{x+1}$ → reduzca los términos semejantes

Como $D(f) = \mathbb{R}\ \ y\ \ D(g) = \mathbb{R} - \{1\}$, tenemos que:

$$D(f\ +\ g) = D(f) \cap D(g) = \mathbb{R} \cap [\mathbb{R} - \{1\}] = \mathbb{R} - \{1\}.$$

Significa que el dominio es todo $\mathbb{R}$ menos en 1, pues hace que el denominador de la función que resulta sea igual a 0.

Veamos ahora las siguientes operaciones:

FUNCIÓN PRODUCTO:

Multiplicar y dividir funciones también es como multiplicar y dividir polinomios.

Si $f(x)\ y\ g(x)$ son funciones: Su producto $(f\ \cdot\ g)(x)$ es la función definida por:

$$\boldsymbol{(f.g)(x) = f(x).g(x)}$$

Dominio: los números comunes a ambos dominios de $\boldsymbol{f\ y\ g}$**.**

FUNCIÓN COCIENTE:

Si $f(x)\ y\ g(x)$ son funciones: Su cociente $\frac{f(x)}{g(x)}$ es la función definida por: $\boldsymbol{\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}}$

El **dominio** de la función resultante consta de los números que son comunes a ambos dominios de $\boldsymbol{f\ y\ g}$, pero los números x para los cuales $\boldsymbol{g(x) = 0}$ deben excluirse del dominio del cociente $\boldsymbol{\frac{f}{g}}$.

EJEMPLO 4: Dadas las funciones: $\boldsymbol{f(x) = 2x\ +\ 1}$, $\boldsymbol{g(x) = 5x\ -\ 3}$. Encuentre el producto y cociente de las funciones.

Solución:

a. **Producto** $(f.g)(x) = f(x).g(x)$

$= (2x\ +\ 1\ )\ (5x\ -\ 3)$→**Identifique$\boldsymbol{f(x)\ y\ g(x)}$.**

Reemplace $\boldsymbol{f(x)\ \ y\ g(x)}$

$= (10\,x^2 - 6x + 5x - 3)$ → **Multiplique los polinomios**

$= 10\,x^2 + x + 3$ → **Sume y combine los términos semejantes**

Como $\boldsymbol{D(f)} = \mathbb{R}\ \ \boldsymbol{y}\ \ \boldsymbol{D(g)} = \mathbb{R}$, tenemos que: $\boldsymbol{D(f\cdot g) = D(f) \cap D(g)} = \mathbb{R}$

b. Cociente $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$

$= \frac{2x+1}{5x-3}$

Dominio de $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \mathbb{R} - \left\{\frac{3}{5}\right\}$. Significa que el dominio es todo $\mathbb{R}$ menos $\frac{3}{5}$, pues hace que el denominador de la función cociente sea igual a 0.

Recuerde que la división entre cero no está definida, por esta razón eliminamos del dominio el número que hace cero el denominador.

VEAMOS OTROS EJEMPLOS:

EJEMPLO 5: Dadas las funciones $f(x)$ y $g(x)$, vamos a hallar $(f \cdot g)(x)$

$f(x) = \sqrt{x-3}$; $g(x) = \frac{1}{x+2}$

Solución:

$(f.g)(x) = f(x).g(x) = \sqrt{x-3} \cdot \frac{1}{x+2}$ → **Recuerde que hay que buscar el MCM**

$= \frac{\sqrt{x-3}}{x+2}$

Como $D(f) = [3, \infty)$ y $D(g) = \mathbb{R} - \{-2\}$, tenemos que: $D(f \cdot g) = D(f) \cap D(g) = [3, \infty) \cap \mathbb{R} - \{-2\} = [3, \infty)$

EJEMPLO 6: Dadas las funciones $f(x)$ y $g(x)$, vamos a hallar $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$

$f(x) = \sqrt{x-2}$, $\quad g(x) = \frac{x-5}{x+3}$

Solución:

$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\sqrt{x-2}}{\frac{x-5}{x+3}} = \frac{\sqrt{x-2}\,.\,(x+3)}{x-5}$

Observamos que $g(x) = 0$ solamente si $x = 3$. Luego: $\{x \,/\, g(x) = 0\} = \{3\}$
Como $D(f) = [2, \infty)$ y $D(g) = \mathbb{R} - \{-3\}$, tenemos que:

$$D(f \,/\, g) = [D(f) \cap D(g)] - \{x \,/\, g(x) = 0\} = [\,[2, \infty) \cap \mathbb{R} - \{-3\}\,] - \{5\}$$
$$= [2, \infty) - \{5\}$$

EN ESTA PÁGINA PUEDE ENCONTRAR MÁS SOBRE LAS OPERACIONES CON FUNCIONES… ¡ADELANTE!

http://calculo.cc/temas/temas_bachillerato/primero_ciencias_sociales/funciones/teoria/operaciones.html

Desafío

Dadas las funciones siguientes, encuentre $\left(\frac{f+g}{h}\right)(x)$ y el dominio

a. $\boldsymbol{f(x) = 8x^3 + 3x^2}$

b. $\boldsymbol{g(x) = 4x^3 + 9x^2}$

c. $\boldsymbol{h(x) = 3x^2}$

Composición de funciones

Esta nueva operación consiste en evaluar una función en otra.

DEFINICIÓN: Sean $f(x)$ y $g(x)$ dos funciones tal que $x \in Dg$ y $g(x) \in D_f$. La composición de las funciones f y g, denotada por $(f \ o\, g)(x)$, se define como: $\boldsymbol{(fog)x = f(g(x))}$ **.**

La expresión se lee: f o g de x es igual a f de g de x.

También se definen las siguientes composiciones de funciones:

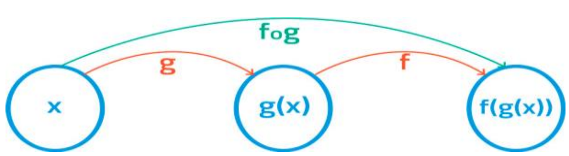
a. $\boldsymbol{(g\ o f)(x) = g(f(x))}$, donde $x \in D_f$ y $f(x) \in Dg$

b. $\boldsymbol{(f\ o f)(x) = f(f(x))}$, donde $x \in D_f$ y $f(x) \in D_f$

c. $\boldsymbol{(g\ o g)(x) = g(g(x))}$, donde $x \in Dg$ y $g(x) \in Dg$

La composición de funciones no es una operación conmutativa.

En un diagrama de flechas, lo vemos de la siguiente manera:



Dominio de una función compuesta

En una función compuesta $(\boldsymbol{fog})$ el dominio está definido por la siguiente expresión:

$$D_{fog}: x \in D_g \wedge g(x) \in D_f$$

En este video, veremos la introducción al tema, y algunos ejercicios de función compuesta y dos problemas de **dominio de la función compuesta.** https://matemovil.com/funcion-compuesta-ejercicios-resueltos/.

Después que observes los videos, el desafío a desarrollar es el siguiente:

DESAFÍO 2

Si $f(x)=\sqrt{x}$;
$g(x)=\sqrt{(2-x)}$;
encontrar $f{\circ}f$ y $g{\circ}g$.

EJEMPLOS DE FUNCIONES COMPUESTAS

EJEMPLO 7: Dadas las funciones $f(x) = x^2 + 4$ y $g(x) = x^2 + 3x - 2$, determine

a. $(\boldsymbol{fog})\boldsymbol{x}$, **b.** $(\boldsymbol{g} \circ \boldsymbol{f})(\boldsymbol{x})$, **b.** $(\boldsymbol{f} \circ \boldsymbol{f})(\boldsymbol{x})$.

Solución:

a. $(fog)x = f(g(x))$

$= f(x^2 + 3x - 2)$ → **Se reemplaza** $\boldsymbol{g(x) = x^2 + 3x - 2}$

$= (x^2 + 3x - 2)^2 + 4$ → Se evalúa $g(x)$ en $f(x)$

$= \boldsymbol{x^4 + 6x^3 - 7x^2 + 8}$ → Se resuelve, haciendo la multiplicación de polinomios

b. $(g\ of)(x) = g(f(x))$

$= g(x^2 + 4)$ → **Se reemplaza** $f(x) = x^2 + 4$

$= (x^2 + 4)^2 + 3(x^2 + 4) - 2$ → Se evalúa $f(x)$ en $g(x)$

$= x^4 + 8x^2 + 16 + 3x^2 + 12 - 2$ →Se resuelven las operaciones algebraicas

$= x^4 + 11x^2 + 26$

c. $(f\ of)(x) = f(f(x))$

$= f(x^2 + 4)$ → **Se reemplaza** f(x) = x^2 + 4

$= (x^2 + 4)^2 + 4$ → Se evalúa f(x) en f(x)

$= x^4 + 8x^2 + 16 + 4$ → Se resuelven las operaciones algebraicas

$= x^4 + 8x^2 + 20$

En todas las funciones el Dominio es R, pues el $Df = R$ y el $Dg = R$. ¡**Puede Verificarlo!**

¡FELICIDADES!, SI HAS LLEGADO HASTA AQUÍ, HAS TERMINADO EL TEMA

Ahora debe poner en práctica lo aprendido, resolviendo la siguiente actividad

ACTIVIDAD N°8

__________ Apliquemos lo aprendido_________

1. Dadas las funciones $f(x) = x - 2$ y $g(x) = 3x + 1$ relaciona ambas columnas

A. $f(x) + g(x)$	1. $3x^2 - 5x - 2$
B. $f(x) \cdot g(x)$	2. $\frac{x-2}{3x+1}$
C. $f(x)/g(x)$	3. $4x - 1$

2. Dadas las funciones $f(x) = x - 2$ y $g(x) = 3x + 1$ relaciona ambas columnas

A. $g(x)/f(x)$	1. $\frac{3x+1}{x-2}$
B. $fog(x)$	2. $3x - 1$
C. $g(f(x))$	3. $3x - 5$

3. Dadas las funciones $f(x) = \sqrt{x+5}$ y $g(x) = x^2$ determina $(f.g)(x)$ y $(f/g)(x)$.
4. Dadas las siguientes funciones, determina la función suma, diferencia, producto y cociente. Determina además su dominio.

   a. $f(x) = 3x^2 - 6$; $h(x) = x^2 + 3x - 2$

   b. $f(x) = \dfrac{4x^2 - 1}{2x + 1}$; $h(x) = 5 - x^2$

   c. $h(x) = \sqrt{x+1}$; $g(x) = x^2 - 9$

5. Dadas las siguientes funciones determine $(fog)x$, $(g\ o f)(x)$, $(f\ of)(x) y\ (g\ o\ g)(x)$

   a. $f(x) = 5x^2 - 3$: $f(x) = \frac{x+2}{2x+3}$

   b. $f(x) = \frac{3x}{2} + 1$; $g(x) = 2x^2 + 3$

   c. $f(x) = \sqrt{x^2 - 9}$; $g(x) = x^3 - 4x$

Algunas Respuestas

1. 1B,2C,3A **2. 1A,2B,3C**

RESPUESTA AL DESAFÍO 2

$$fof = f(f(x)) = f(\sqrt{x}) = \sqrt{\sqrt{x}} = \sqrt[4]{x} \qquad gog = g(g(x)) = g(\sqrt{2-x}) = \sqrt{2 - \sqrt{2-x}}$$

Felicidades por tu esfuerzo hasta este momento, recuerda que puedes revisar la teoría sí olvidaste algo.

TEMA 9. FUNCIONES TRASCENDENTES

Antes de iniciar debemos recordar aspectos importantes como, por ejemplo, la circunferencia unitaria, que es el conjunto de puntos del plano que están a la misma distancia (llamada radio) de un punto fijo (llamado centro) y tiene la particularidad que su centro está en el origen de coordenadas y su radio es una unidad (1).

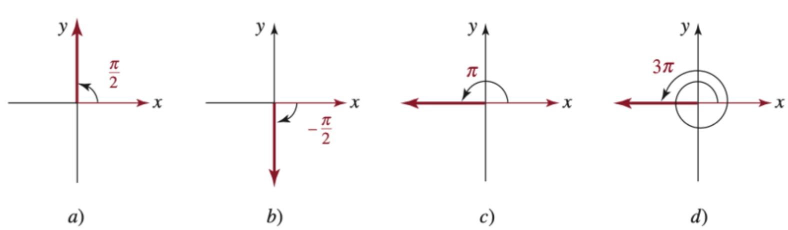
Esta circunferencia unitaria es de gran utilidad para definir las funciones trigonométricas, dado que nos permiten ver la relación entre las razones trigonométricas. Entonces la definiremos formalmente:

Circunferencia Unitaria: es una circunferencia de radio 1 con centro en el origen del plano cartesiano. Su ecuación es: $x^2 + y^2 = 1$

En el cálculo, la unidad más cómoda para medir ángulos es el radián. La medida de un ángulo en radianes se basa en la longitud de un arco del círculo unitario.

Como ya sabemos, un ángulo θ en posición normal se puede considerar como formado por la rotación del lado inicial, desde el eje positivo de ***x*** hasta el lado terminal. Como se ve en la FIGURA 2, el lado inicial de θ recorre una distancia ***t*** a lo largo de la circunferencia del círculo unitario. Se dice que la medida de θ es ***t*** radianes.

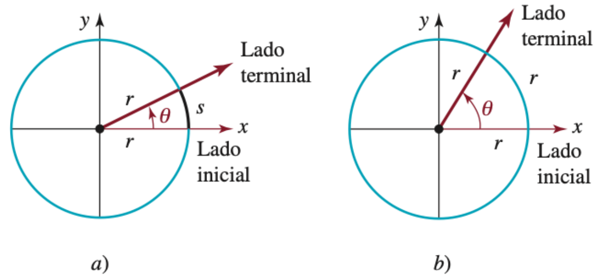
En radianes se usa la misma convención que con la medida en grados: un ángulo formado por una rotación contraria a las manecillas del reloj se considera positivo, mientras que un ángulo formado por una rotación en el sentido de las manecillas del reloj es negativo. Como la circunferencia del círculo unitario es 2π, un ángulo formado por una rotación en contra de las manecillas del reloj es 2π radianes. En la FIGURA 1 se han ilustrado ángulos de $\pi/2$, $-\pi/2$, π y 3π radianes,



respectivamente. De acuerdo con las figuras 1c) y 1d), un ángulo de π radianes es coterminal con uno de 3π radianes.

$$\theta = \frac{s}{r} \qquad (1)$$

En el caso en que el lado terminal de θ atraviesa un arco de longitud ***s*** a lo largo de la circunferencia del círculo igual al radio ***r*** del circulo, nos damos cuenta, por (1), de que la medida del ángulo θ es 1 radián. Véase la figura 2

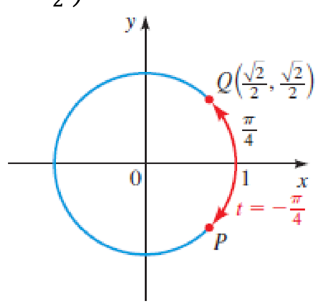


Ahora recordemos su forma de utilizarlos:

Ejemplo: Encuentre el punto terminal determinado por el número real t dado.

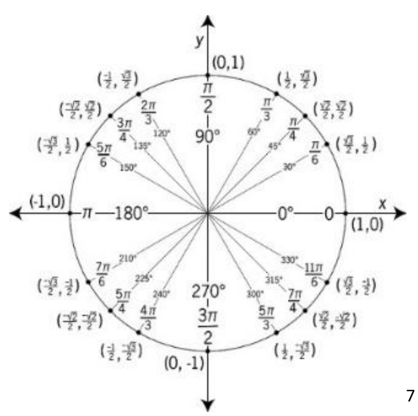
$$t = -\frac{\pi}{4}$$

Sea **P** el punto terminal determinado por $-\frac{\pi}{4}$ y sea **Q** el punto terminal determinado por $\frac{\pi}{4}$. el punto P tiene las mismas coordenadas que Q excepto por el signo de la coordenada en y. Como P está en el cuarto cuadrante, su coordenada x es positiva y su coordenada y es negativa. Entonces el punto terminal es $P\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.



[6] Imagen Ilustrativa

En adelante la siguiente imagen nos ayudara a encontrar los valores de las funciones trigonométricas.



[7] Imagen Ilustrativa

[6] Imagen tomada de Stewart, Redlin, Watson. (2012) **Pre cálculo. Matemáticas para el cálculo.** Sexta Edición. Cengage Learning

[7] Imagen obtenida de www.google.com

A. Funciones trigonométricas

Sea t un número real y sea $P(x, y)$ el punto terminal en la circunferencia unitaria determinado por t. Definimos

$$\boldsymbol{sen\,t = y} \qquad \boldsymbol{cos\,t = x} \qquad \boldsymbol{tan\,t = \frac{y}{x}, x \neq 0}$$

$$\boldsymbol{csc\,t = \frac{1}{y},} \quad \boldsymbol{y \neq 0} \quad \boldsymbol{sec\,t = \frac{1}{x},} \quad \boldsymbol{x \neq 0}$$

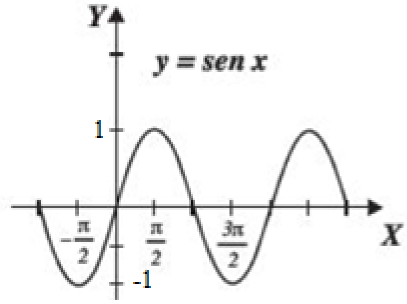
$$\boldsymbol{cot\,t = \frac{x}{y},} \quad \boldsymbol{y \neq 0}$$

Debido a que las funciones trigonométricas se pueden definir en términos de la circunferencia unitaria, a veces reciben el nombre de funciones circulares.

Aspectos importantes

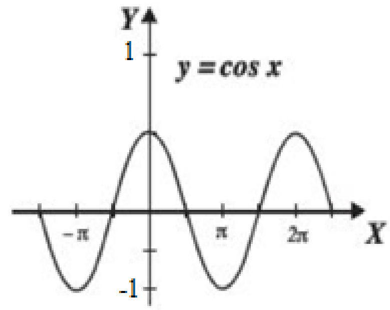
Los signos de las funciones trigonométricas dependen del cuadrante donde se encuentre el punto terminal de t.

Cuadrante	Funciones +	Funciones -
I	todas	Ninguna
II	$sen\,x, csc\,x$	$Cos\,x, \sec x,$ $tan\,x, cot\,x$
III	$tan\,x, cot\,x$	$Sen\,x, \csc x,$ $cos\,x, sec\,x$
IV	$cos\,x, sec\,x$	$Sen\,x, \csc x,$ $tan\,x, cot\,x$



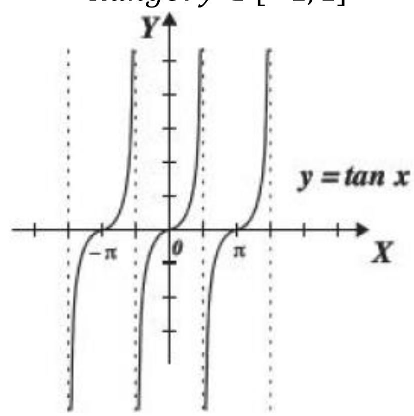
$Dominio: x \in (-\infty, \infty)$

$Rango: y \in [-1, 1]$



$Dominio: x \in (-\infty, \infty)$

$Rango: y \in [-1, 1]$



$Dominio: \left\{x \in R \,\middle|\, x \neq \frac{(2n+1)\pi}{2}, n \in Z\right\}$

$Rango: y \in (-\infty, \infty)$

Las funciones trigonométricas están relacionadas unas a otras mediante expresiones que reciben el nombre de **identidades trigonométricas**.

Identidades recíprocas:

$$\csc t = \frac{1}{sen\ t} \qquad \sec t = \frac{1}{\cos t} \qquad \cot t = \frac{1}{\tan t}$$

$$\tan t = \frac{sen\ t}{\cos t} \qquad \cot t = \frac{\cos t}{\text{sen}\, t}$$

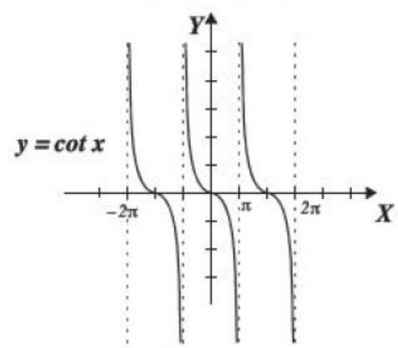
Identidades Pitagóricas

$$\boldsymbol{sen^2 t + cos^2 t = 1 \quad tan^2 t + 1 = sec^2 t}$$

$$\boldsymbol{1 + cos^2 t = csc^2 t}$$

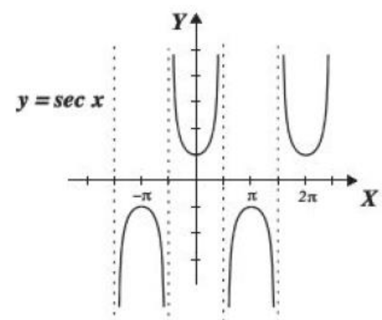
Propiedades periódicas de las funciones

- Las funciones seno y coseno tienen periodo 2π. Es decir repiten sus valores en cualquier intervalo de longitud 2π, para trazar sus gráficas primero se debe graficar un periodo.
- Las funciones tangente y cotangente tienen período π.
- Las funciones cosecante y secante tienen período 2π



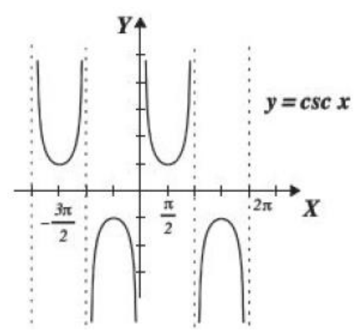
$Dominio: \{x \in R | x \neq n\pi, n\epsilon Z\}$

$Rango: y \in \ (-\infty, \infty)$



$$Dominio: \left\{x \in R \middle| x \neq \frac{(2n+1)\pi}{2}, n \in Z\right\}$$

$$Rango: y \in (-\infty, -1] \cup [1, \infty)$$



$$Dominio: \{x \in R | x \neq n\pi, n \in Z\}$$

$$Rango: y \in (-\infty, -1] \cup [1, \infty)$$

Evaluación de las funciones trigonométricas

Ejemplo: Encuentre las seis funciones trigonométricas de cada número real t dado.

$$t = \frac{\pi}{3}$$

Solución:

El punto terminal determinado por $t = \frac{\pi}{3}$ es $P\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$. De aquí obtenemos las coordenadas que serán $x = \frac{1}{2}$, $y = \frac{\sqrt{3}}{2}$, tenemos entonces, siguiendo la definición de las funciones trigonométricas dadas:

$sen\ \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $\quad \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$ $\quad \tan\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}/2}{1/2} = \sqrt{3}$ $\quad csc\ \frac{\pi}{3} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ $\quad \sec\frac{\pi}{3} = 2$

$\cot\frac{\pi}{3} = \frac{1/2}{\sqrt{3}/2} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

Ejemplo: Hallar todas las funciones trigonométricas a partir de $\cos t = \frac{3}{5}$, $t\ en\ Q_4$

Solución: De las identidades pitagóricas tenemos que $\boldsymbol{sen^2 t + cos^2 t = 1}$ **entonces**

$\boldsymbol{sen^2 t + \left(\frac{3}{5}\right)^2 = 1}$ → Sustituyendo el valor del coseno

$\boldsymbol{sen^2 t = 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25}}$→ Despejando y reduciendo

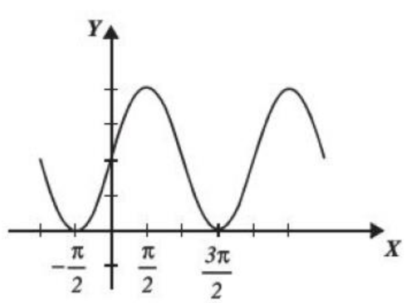
$\boldsymbol{sen\ t = \pm\frac{4}{5}}$

Considerando que está en el cuarto cuadrante, el $sen\ t$ es negativo, así el $sen\ t = -\frac{4}{5}$. De esta manera conocemos el seno y el coseno y así podemos determinar las demás utilizando las recíprocas que definimos anteriormente.

$\tan t = \frac{sen\ t}{\cos t} = \frac{-\frac{4}{5}}{\frac{3}{5}} = -\frac{4}{3}$ $\quad \csc t = \frac{1}{sen\ t} = -\frac{5}{4}$ $\quad \sec t = \frac{1}{cost} = \frac{5}{3}$ $\quad \cot t = \frac{1}{\tan t} = -\frac{3}{4}$

Ejemplo: Determina la gráfica de $y = 2\ senx + 2$, su dominio y rango.

La función $f(x) = sen\ x$, se alarga 2 unidades verticalmente y se desplaza dos unidades hacia arriba, obteniendo la siguiente gráfica:



¿Podrías decir el dominio y el rango?

B. Función exponencial

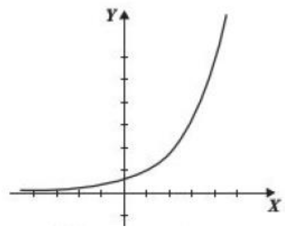
Es una función de la forma $f(x) = a^x$ donde $a > 0, a \neq 1$.

Dominio: $D_f: x \in (-\infty, \infty)$

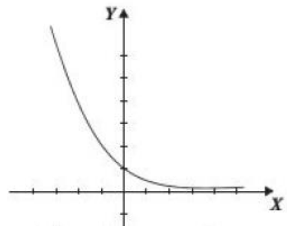
Rango: $y \in (0, \infty)$, $si\ a = 1$,

Gráfica

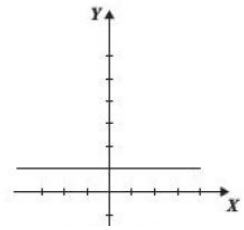
básicamente existen tres tipos:



$f(x) = a^x, a > 1$



$f(x) = a^x, 0 < a < 1$



$f(x) = 1^x$

Ejemplo: Grafica las siguientes funciones exponenciales: $f(x) = 2^x$ y $g(x) = 2^{-x}$.

Solución:

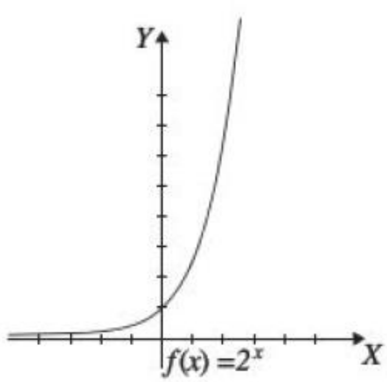
Primero debemos hacer una tabla de valores y luego localizar los puntos para trazar la gráfica. Obtendremos:

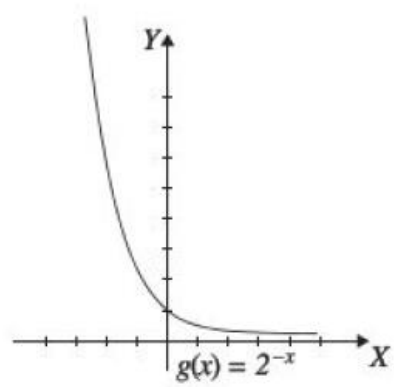
$f(x) = 2^x$

x	- 3	- 2	- 1	0	1	2	3
f(x)	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8

$f(x) = 2^{-x}$

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
f(x)	8	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$





Ejemplo: Obtén las gráficas de: $y = -e^{x}$, $y = -e^{-x}$

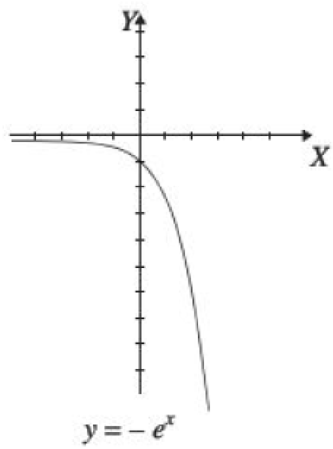
Solución:

Una de las funciones exponenciales más destacadas es: $f(x) = e^{x}, con\ e \approx 2{,}71828$

Luego, creamos una tabla de valores para cada función:

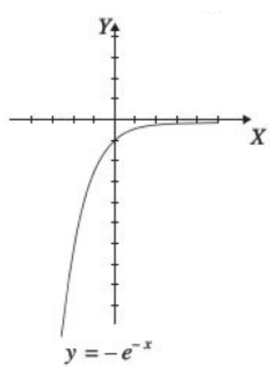
$f(x) = -e^{x}$

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
f(x)	-0,05	-0,14	-0,37	-1	-2,72	-7,39	-20,09



$f(x) = -e^{-x}$

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
f(x)	-20,09	-7,39	-2,72	-1	-0,37	-0.14	-0,05



Las funciones exponenciales se utilizan con frecuencia para calcular el interés compuesto. Donde una cantidad de dinero llamada **principal (P)** se invierte a una tasa de interés i, por período de tiempo, aquí se debe encontrar la cantidad de dinero A, dada una tasa de interés anual (r) en un periodo t de años. A través de la fórmula $A(t) = P\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}$

Ejemplo: Una suma de 1000 se invierte a una tasa de interés de 12% al año. Encuentre las cantidades en la cuenta después de 3 años. Si el interés se capitaliza anual, semestral trimestral y diario.

Solución

Para este problema $P = 1000, r = 0.12, \ t = 3$

Anual

$$A(t) = P\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}$$

$$A(t) = 1000\left(1 + \frac{0.12}{1}\right)^{1(3)} = 1404.93$$

Semestral

$$A(t) = P\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}$$

$$A(t) = 1000\left(1 + \frac{0.12}{2}\right)^{2(3)} = 1418.52$$

Trimestral

$$A(t) = P\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}$$

$$A(t) = 1000\left(1 + \frac{0.12}{4}\right)^{4(3)} = 1425.76$$

Diario

$$A(t) = P\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}$$

$$A(t) = 1000\left(1 + \frac{0.12}{365}\right)^{365(3)} = 1433.24$$

C. Función logarítmica

Un logaritmo se define como el exponente al que se eleva un número llamado base, para obtener cierto número, de tal forma que aplicado a la función exponencial queda: $y = a^x$ *entonces* $\log_a y = x, y > 0,$ *por tanto* $f^{-1}(x) = \log_a x$

De lo anterior, se define la *función logarítmica* como $g(x) = \log_a x$

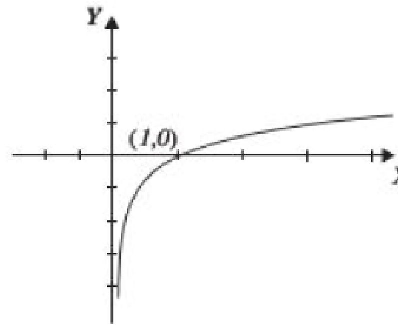
Propiedades de los logaritmos:

$$log_a 1 = 0$$
$$log_a a = 1$$
$$log_a a^x = x$$
$$a^{log_e x} = x$$

Dominio: $x \in (0, \infty)$,

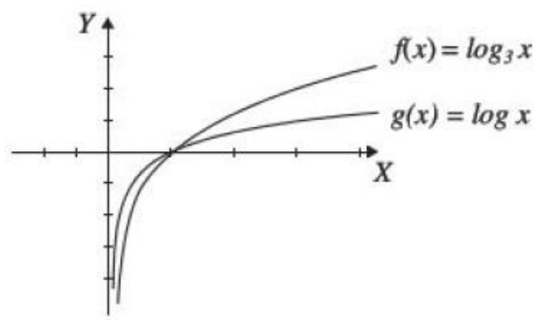
Rango: $x \in (-\infty, \infty)$

Gráfica:



Pasa por el punto (1,0), porque $\log_a 1 = 0$, ya que $a^0 = 1$ es creciente y tiene una asíntota vertical en x=0.

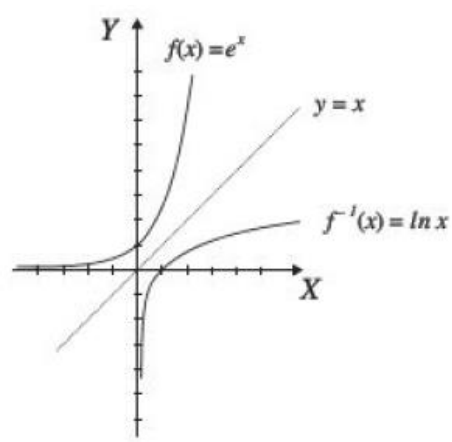
Por ejemplo, las gráficas de las funciones: $f(x) = \log_3 x$ y $g(x) = \log x$ son:



Por otro lado, $\ln x = log_e x$

Por lo tanto, si $f(x) = e^x$

Entonces $f^{-1}(x) = \ln x$



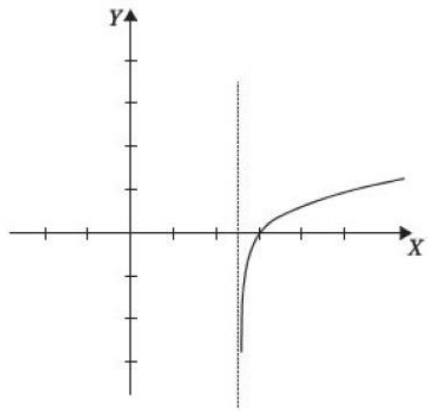
Ejemplo: Determine la gráfica de $y = \log(2x - 5)$.

Solución

Primero determinamos el dominio; recuerda que $\log_b N = a, entonces\ N > 0$

$$2x - 5 > 0 \to x > \frac{5}{2} \to x \in (\frac{5}{2}, \infty)$$

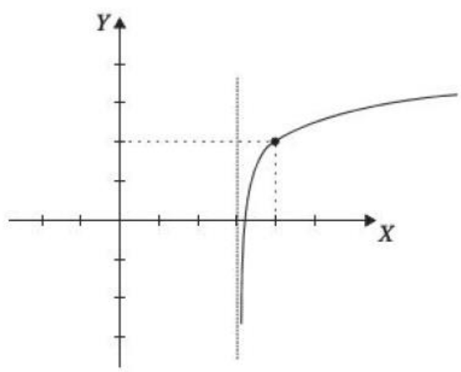
Se traza una asíntota en $x = \frac{5}{2}$ y se desplaza la gráfica $y = \log_{10} x$



Ejemplo: Determina la gráfica de $y = \log(x - 3) + 2$

Solución:

Se desplaza la gráfica de $y = \log x$ dos unidades hacia arriba y tres a la derecha



ACTIVIDAD N°9

__________ Apliquemos lo aprendido________

I Parte. Encuentre los valores de las seis funciones trigonométricas de t a partir de la información dada.

a. $sen\, t = \frac{3}{5}, \ \ t\ en\ Q_2$
b. $\sec t = 3, \ \ t\ en\ Q_4$
c. $\tan t = \frac{1}{4}, \ \ t\ en\ Q_3$

II Parte. Obtén la gráfica de cada una de las siguientes funciones:

1. $f(x) = -\tan x$
2. $f(x) = -2sen\, x + 1$
3. $f(x) = 3\cos x - 2$
4. $f(x) = sen\, x + 3$
5. $f(x) = sen\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$

III parte. Determina la gráfica de cada una de las siguientes funciones:

1. $f(x) = e^x + 1$
2. $f(x) = 1 - e^x$
3. $f(x) = 1 + \log x$
4. $f(x) = \ln(x - 2)$
5. $f(x) = 2 + \ln(x + 1)$

IV. Aplicaciones a la vida diaria obtenidas del libro de Pre Cálculo de Stewart, Redlin y Watson[8]

a. **Interés compuesto**: si se invierten 500 a una tasa de interés del 3.75% por año, capitalizado trimestralmente, encuentre el valor de la inversión después del número dado de años.
   - 1 año - 2 años - 10 años
b. **Crecimiento Logístico**: las poblaciones de animales no son capaces de crecimiento no restringido debido a que el hábitat y la disponibilidad de alimentos son limitados. Bajo estas condiciones, la población sigue un modelo de crecimiento logístico: $P(t) = \frac{d}{1+ke^{-ct}}$
   Donde c, d y k son constantes positivas. Para cierta población de peces de un pequeño estanque, d= 1200, k= 11, c= 0.2 y t se mide en años. Los peces se introdujeron en el estanque en el tiempo t=0.
   - ¿Cuántos peces fueron introducidos originalmente en el estanque?
   - Encuentre la población después de 10, 20 y 30 años.
c. **Colonia de Bacterias.** Cierta cepa de bacterias se divide cada tres horas. Si una colonia se inicia con 50 bacterias, entonces el tiempo t (en horas) necesario para que la colonia crezca a N bacterias está dado por $t = 3\frac{log(N/50)}{\log 2}$
   Encuentre el tiempo necesario para que la colonia crezca a un millón de bacterias.

---

[8] Stewart, Redlin, Watson. (2012) **Pre cálculo. Matemáticas para el cálculo.** Sexta Edición. Cengage Learning

EVALUACIÓN DIAGNÓSTICA

Te invitamos a visitar la página es.khanacademy.org allí podrás encontrar ejercicios que te ayudaran a ver qué tanto ha aprendido.
https://es.khanacademy.org/math/algebra-basics/alg-basics-linear-equations-and-inequalities/alg-basics-one-step-inequalities/e/one_step_inequalities

https://es.khanacademy.org/math/matematicas-preparacion-educacion-superior/algebra-i-pe-pre-u/xcf551cef49d842ce:inecuaciones/xcf551cef49d842ce:inecuaciones-de-primer-grado-con-una-variable-de-la-forma-axb-axb-ax-b-y-ax-b-a-0/e/inequalities-_on_a_number_line

https://es.khanacademy.org/math/algebra/x2f8bb11595b61c86:functions

TEMA 10. LÍMITE DE UNA FUNCIÓN

CONTENIDO

El límite de una función es un concepto fundamental del análisis matemático aplicado a las funciones. En particular, el concepto aplica en análisis real al estudio de límites, continuidad y derivabilidad de las funciones reales.

Intuitivamente, el hecho de que una función f alcance un límite L en un punto c significa que, tomando puntos suficientemente próximos a c, el valor de f puede ser tan cercano a L como se desee. La cercanía de los valores de f y L no depende del valor que adquiere f en dicho punto c.

El límite funcional es un concepto relacionado con la variación de los valores de una función a medida que varían los valores de la variable y tienden a un valor determinado. El límite de una función en un valor determinado de *x* es igual a un número al cual tiende la función cuando la variable tiende a dicho valor. Este hecho se indica así:

$$\lim_{x \to a} f(x)$$

Para comprender un poco más el concepto de límite analizaremos el siguiente ejemplo:

Si tenemos el conjunto $A = \left\{\frac{1}{x}\ tal\ que\ x \in \boldsymbol{N}\right\}$ entonces algunos de estos elementos del conjunto serán: $\left\{1, \dots \frac{1}{2}, \dots \frac{1}{4}, \dots \frac{1}{8}, \dots \frac{1}{16}, \dots \frac{1}{32}, \dots\right\}$. Hacemos una representación gráfica del conjunto A en la recta numérica, tendremos:

Como apreciamos en la gráfica, el valor de la expresión $\frac{1}{x}$, se va haciendo cada vez más pequeño y cada vez más cerca de cero; entonces ocurrirá que cuando el valor de x se hace muy grande, $\frac{1}{x}$, será sumamente pequeño, tan pequeño que tiende a anularse, es decir se acerca mucho a cero.

Podemos deducir que la expresión $\frac{1}{x}$, tiene un límite hacia el cual se acerca tanto que puede considerarse igual a él, como podemos ver nuestro ejemplo ese límite es cero.

De lo anterior, concluimos que el límite de la expresión $\frac{1}{x}$, cuando x tiene a infinito (valor sumamente grande), es cero. Esto podemos escribirlo así:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 0$$

Esta expresión se lee: el límite de $\frac{1}{x}$, cuando x tiende a infinito, es cero.

El cálculo de límites usando valores crecientes y decrecientes emplea demasiado tiempo. Por esos se estudiarán una serie de proposiciones que serán útiles para el cálculo de límites.

TEOREMA SOBRE LÍMITES

1) El límite de una constante **c** cuando **x** tiende al valor **a** es la constate **c.**

$$\lim_{x \to a} c = c$$

Ejemplos:

1) $\lim_{x \to 2} 3 = 3$ 2) $\lim_{x \to 0} (-5) = -5$ 3) $\lim_{x \to 2} 5a = 5a$

2) El límite de **x** cuando **x** tiende a al valor **a** es **a**.

$$\lim_{x \to a} x = a$$

Ejemplos:

1) $\lim_{x \to 1/4} x = 1/4$ 2) $\lim_{x \to -2} x = -2$ 3) $\lim_{x \to 4} x = 4$

Caso Particular: El límite del producto de una constante por una función, cuando **x → a**, es igual al producto de la constante por el límite de la función cuando **x → a**.

$$\lim_{x \to a} c \cdot f(x) = c \cdot \lim_{x \to a} f(x) = c \cdot f(a)$$

Ejemplos:

1) $\lim_{x \to 2} 3x = 3 \lim_{x \to 2} x = 3(2) = 6$ 2) $\lim_{x \to 8} \frac{1}{2} x = \frac{1}{2} \lim_{x \to 8} x = \frac{1}{2}(8) = 4$

3) Si **m** y **b** son dos constantes cualesquiera,

$$\lim_{x \to a} (mx + b) = ma + b$$

Ejemplos:

1) $\lim_{x\to 5} 2x-8 = 2(5)-8 = 10-8 = 2$

2) $\lim_{x\to 8}(\frac{x}{2}-9) = \frac{8}{2}-9 = 4-9 = -5$

3) $\lim_{x\to 2}(3x+5) = 3(2)+5 = 6+5 = 11$

4) El límite de la suma de un número finito de funciones cuando **x → a** es igual a la suma de los límites de estas funciones cuando x → **a**:

Sea f y g son dos funciones tales que: $\lim_{x\to a} f(x) = L$ y $\lim_{x\to a} g(x) = M$ entonces:

$$\lim_{x\to a}\left[f(x)+g(x)\right] = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x) = L+M$$

De igual forma:

$$\lim_{x\to a}\left[f(x)-g(x)\right] = \lim_{x\to a} f(x) - \lim_{x\to a} g(x) = L-M$$

Ejemplos:

1) $\lim_{x\to 3}(2x+5x)$

$= \lim_{x\to 3}(2x+5x)$
$= 2\lim_{x\to 3} x + 5\lim_{x\to 3} x$
$= 2(3)+5(3)$
$= 6+15$
$= 21$

2) $\lim_{x\to 1}(2x-5)$

$= 2\lim_{x\to 1} x - \lim_{x\to 1} 5$
$= 2(1)-5$
$= 2-5$
$= -3$

3) $\lim_{x\to 3}(x^2+7x-5)$

$= \lim_{x\to 3} x^2 + \lim_{x\to 3} 7x - \lim_{x\to 3} 5$
$= \lim_{x\to 3} x^2 \cdot + 7\lim_{x\to 3} x - 5$
$= 3^2 + 7\cdot 3 - 5$
$= 9+21-5$
$= 30-5 = 25$

5) El límite del producto de un número finito de funciones cuando x→a, es igual al producto de los límites de estas funciones cuando x → a.

Si $\lim_{x\to a} f(x) = L$ y $\lim_{x\to a} g(x) = M$ entonces

$$\lim_{x\to a}\left[f(x)\cdot g(x)\right] = \lim_{x\to a} f(x)\cdot \lim_{x\to a} g(x) = L\cdot M$$

Ejemplo:

1) $\lim_{x\to 4} x(2x+1)$

$= \lim_{x\to 4} x \cdot \lim_{x\to 4}(2x+1) = (4)\cdot((2)(4)+1) = (4)(9) = 36$

6) El límite del cociente de dos funciones cuando x $\to$ a es igual al cociente de los límites de las funciones cuando x $\to$ a, siempre que el límite de denominador no sea igual a cero.

Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$ y $\lim\limits_{x\to a} g(x) = M$ y M $\neq$ 0 entonces

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)} = \frac{L}{M}$$

Ejemplo:

$$\lim_{x\to 2}\frac{4x+7}{2x+1} = \frac{\lim\limits_{x\to 2}(4x+7)}{\lim\limits_{x\to 2}(2x+1)} = \frac{\lim\limits_{x\to 2} 4x + \lim\limits_{x\to 2} 7}{\lim\limits_{x\to 2} 2x + \lim\limits_{x\to 2} 1} = \frac{4(2)+7}{2(2)+1} = \frac{8+7}{4+1} = \frac{15}{5} = 3$$

7) El límite de la potencia de una función cuando x$\to$a y **n** es cualquier entero positivo, es igual a la función cuando x$\to$a elevada a **n**.

Sea $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$ y **n** es cualquier entero positivo entonces:

$$\lim_{x\to a}[f(x)]^n = \left[\lim_{x\to a} f(x)\right]^n = L^n$$

Ejemplo:

1) $\lim\limits_{x\to -2}(6x+7)^4 = \left[\lim\limits_{x\to -2}(6x+7)\right]^4 = [6(-2)+7]^4 = [-12+7]^4 = [-5]^4 = 625$

2) $\lim\limits_{x\to -2}(5x+7)^2 = \left(\lim\limits_{x\to -2} 5x+7\right)^2 = (5(-2)+7)^2 = (-10+7)^2 = (-3)^2 = 9$

8) El límite de una función dentro de un radical.

Cuando x$\to$a es igual a la raíz **n** del límite de la función.

$$\lim_{z\to a}\sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x\to a} f(x)}$$

Ejemplo:

$$\lim_{x\to -3}\sqrt[3]{8x-3} = \sqrt[3]{\lim_{x\to -3}(8x-3)} = \sqrt[3]{8(-3)-3} = \sqrt[3]{-24-3} = \sqrt[3]{-27} = -3$$

9) Si $\lim_{x\to a} f_1(x) = L_1, \lim_{x\to a} f_2(x) = L_2, ..., \lim_{x\to a} f_n(x) = L_n$

i) $\lim_{x\to a}\left[f_1(x) + f_2(x) + ... + f_n(x)\right] = L_1 + L_2 + ... + L_n$

ii) $\lim_{x\to a}\left[f(x)_1 \cdot f(x)_2 \cdot ... \cdot f(x)_n\right] = L_1 \cdot L_2 \cdot ... \cdot L_n$

Ejemplos: (Aplicando los teoremas anteriores)

1) $\lim_{x\to 2}(3x^3 - 2x^2 - x + 7)$

$$= 3\lim_{x\to 2} x^3 - 2\lim_{x\to 2} x^2 - \lim_{x\to 2} x + \lim_{x\to 2} 7$$
$$= 3\left[\lim_{x\to 2} x\right]^3 - 2\left[\lim_{x\to 2} x\right]^2 - 2 + 7$$
$$= 3[2]^3 - 2[2]^2 + 5 = 24 - 8 + 5 = 21$$

2) $$\lim_{x\to 3}\sqrt{\frac{x^3 + 2x + 16}{2x^2 + 7}} = \sqrt{\lim_{x\to 3}\frac{x^3 + 2x + 16}{2x^2 + 7}} = \sqrt{\frac{\lim_{x\to 3}\left(x^3 + 2x + 16\right)}{\lim_{x\to 3}\left(2x + 7\right)}}$$

$$= \sqrt{\frac{\left(\lim_{x\to 3} x\right)^3 + 2\lim_{x\to 3} x + \lim_{x\to 3} 16}{2\left(\lim_{x\to 3} x\right)^2 + \lim_{x\to 3} 7}} = \sqrt{\frac{(3)^3 + 2\cdot 3 + 16}{2(3)^2 + 7}}$$

$$= \sqrt{\frac{27 + 6 + 16}{2\cdot 9 + 7}} = \sqrt{\frac{49}{25}}$$

$$= \frac{7}{5}$$

Las reglas para el cálculo de límites se aplican a las operaciones principales: si se opera con dos funciones, siendo las operaciones adición, sustracción, multiplicación, división o potencia, y se calcula su límite en un punto, el resultado es igual a la misma operación aplicada al resultado de los límites de dichas funciones en el punto en cuestión.

11.1 Límites indeterminados

Hasta ahora al calcular el límite de una fracción hemos visto:

a. Si el numerador y el denominador tienen límite distinto de cero, el límite de la fracción es igual al cociente de los límites.
b. Si el límite del numerador es cero y el denominador es distinto de cero, el límite de la fracción es cero.
c. Si el límite del numerador es distinto de cero y el denominador es cero, la fracción no tiene límite y se dice que tiende a más o menos infinito, según el caso.

Pero si el límite del numerador y del denominador son ambos iguales a cero se obtiene la expresión $\frac{0}{0}$, que es una de las formas llamadas indeterminadas porque cualquier número que se ponga como cociente cumple con la condición de que multiplicando por el divisor es igual al dividendo.

Observa la siguiente situación: $\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \frac{4 - 4}{2 - 2} = \frac{0}{0}$

> ***Siempre que se obtenga una indeterminación $\frac{0}{0}$ al hacer una sustitución y antes de afirmar que el límite no existe, se deberá simplificar la función dada para eliminar la indeterminación, para luego encontrar el límite.***

INDETERMINACIÓN DE LA FORMA $\frac{0}{0}$

Una indeterminación es una expresión cuyo valor no se puede establecer en forma directa y que depende del límite específico donde se presenta. Las principales indeterminaciones son:

$$\frac{0}{0} \quad , \quad \frac{\infty}{\infty} \quad , \quad 0 \cdot \infty \quad ; \quad \infty - \infty \quad ; \quad 1^{\infty} \quad , \quad \infty^{0} \quad , \quad 0^{0}$$

Veamos los siguientes casos de **INDETERMINACIÓN** $\frac{0}{0}$

> **CASO A:** $\frac{0}{0}$ **de Funciones Racionales compuestas por polinomios en el numerador** $P(x)$ **y en el denominador** $Q(x)$
>
> $$\lim_{x \to a} \frac{P(x)}{Q(x)} = \lim_{x \to a} \frac{P(a)}{Q(a)} = \frac{0}{0} = \lim_{x \to a} \frac{(x-a) \cdot ?}{(x-a) \cdot ?} =$$

Este tipo de indeterminación se puede resolver factorizando el numerador y denominador de la fracción, a fin de establecer cuál es el factor que en ambos polinomios origina el valor de cero. Una vez que este factor se cancele (y por tanto se rompa la indeterminación), la expresión simplificada tantas veces como sea necesaria generará el resultado definitivo.

Veamos algunos ejemplos:

1. $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x^2 + x - 2}{x - 1} =$

SOLUCIÓN:

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 + x - 2}{x - 1} = \frac{(1)^2 + 1 - 2}{1 - 1} = \frac{0}{0}$$

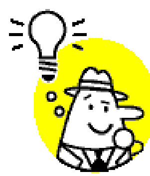
Esta es la forma indeterminada $\frac{0}{0}$

Se retoma el problema para eliminar la indeterminación de la siguiente forma:

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 + x - 2}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{(x+2)\cancel{(x-1)}}{\cancel{x-1}} = x + 2 \quad \text{con} \quad x \neq 1$$

$\boldsymbol{x} \neq \mathbf{1}$ no se está dividiendo entre cero

Factorizamos el trinomio
$x^2 + x - 2 = (x + 2)(x - 1)$



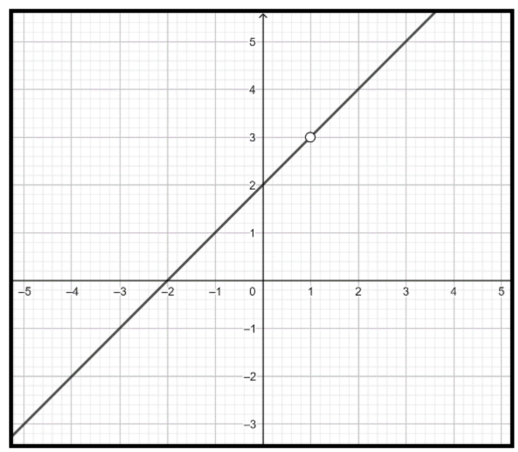
Ahora se toma el límite cuando $\boldsymbol{x}$ tiende,

pero no es igual, a 1; con lo que se obtiene:

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 + x - 2}{x - 1} = \lim_{x \to 1} (x + 2) = 1 + 2 = 3$$

De donde se concluye:

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 + x - 2}{x - 1} = 3$$



En la gráfica se puede apreciar que:

$\lim\limits_{x \to 1^-} \frac{x^2 + x - 2}{x - 1} = 3$ y $\lim\limits_{x \to 1^+} \frac{x^2 + x - 2}{x - 1} = 3$ por lo que se concluye que $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x^2 + x - 2}{x - 1} = 3$

2. $\lim_{x \to -1} \left(\frac{4x+4}{x^3+1}\right)$

SOLUCIÓN:

$\lim_{x \to -1} \left(\frac{4x+4}{x^3+1}\right) = \frac{4(-1)+4}{(-1)^3+1} = \frac{0}{0}$ **(forma indeterminada)**

Se retoma el problema y se factoriza las expresiones del numerador y el denominador. Así:

$\lim_{x \to -1} \left(\frac{4x+4}{x^3+1}\right) = \lim_{x \to -1} \left(\frac{4(x+1)}{(x+1)(x^2-x+1)}\right) = \lim_{x \to -1} \left(\frac{4}{x^2-x+1}\right) = \frac{4}{(-1)^2-(-1)+1} = \frac{4}{3}$ (Existe)

Luego, $\lim_{x \to -1} \left(\frac{4x+4}{x^3+1}\right) = \frac{4}{3}$

CASO B: $\frac{0}{0}$ de Funciones Irracionales

Se racionaliza la expresión, multiplicando numerador y denominador por el conjugado

Cuando aparezcan raíces se procede a racionalizar la función, es decir a multiplicar el numerador y el denominador por el conjugado del numerador o del denominador o ambos conjugados de ser necesario, otro método de resolución es realizar un cambio de variable con el fin de simplificar y luego sustituir. Veamos:

Ejemplos:

1. $\lim_{x \to 0} \left(\frac{9-\sqrt{x+81}}{x}\right)$

Solución:

$\lim_{x \to 0} \left(\frac{9-\sqrt{x+81}}{x}\right) = \frac{9-\sqrt{0+81}}{0} = \frac{9-9}{0} = \frac{0}{0}$ **(Forma indeterminada)**

Se retoma el problema y se procede a multiplicar por la conjugada para raíces cuadradas, de la siguiente forma:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{9-\sqrt{x+81}}{x}\cdot\frac{9+\sqrt{x+81}}{9+\sqrt{x+81}}\right)$$ Multiplicando por el conjugado

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{9^2-(\sqrt{x+81})^2}{x\,(9+\sqrt{x+81})}\right)$$

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{81-(x+81)}{x\,(9+\sqrt{x+81})}\right)$$ Resolviendo operaciones

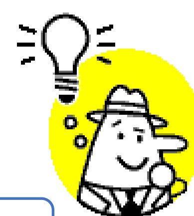
$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\cancel{81}-x-\cancel{81}}{x\,(9+\sqrt{x+81})}\right)$$ Reduciendo términos semejantes

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{-\cancel{x}}{\cancel{x}\,(9+\sqrt{x+81})}\right)$$ simplificando

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{-1}{(9+\sqrt{x+81})}\right)=\left(\frac{-1}{(9+\sqrt{0+81}}\right)=\left(\frac{-1}{9+\sqrt{81}}\right)=\left(\frac{-1}{9+9}\right)=\frac{-1}{18}=-\frac{1}{18}\ \textbf{(existe)}$$

Este mismo problema se pudo resolver mediante un cambio de variable como se ilustra a continuación:

Consideramos $u^2 = x + 81$, de forma que cuando $x \to 0$ entonces $u^2 = 0 + 81 \Rightarrow u = +9$ resultando que $u \to 9$, el límite que se desea calcular quedaría expresado así:



$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{9-\sqrt{x+81}}{x}\right)=\lim_{u\to 9}\frac{9-\sqrt{u^2}}{u^2-81}$$ Cambio de variable

$$=\lim_{u\to 9}\frac{9-u}{(u-9)(u+9)}$$ Factorizando el denominador

$$=\lim_{u\to 9}\frac{-\cancel{(u-9)}}{\cancel{(u-9)}(u+9)}$$ simplificando

$$=\lim_{u\to 9}\frac{-1}{(u+9)}=\frac{-1}{9+9}=\frac{-1}{18}=-\frac{1}{18}\ \textbf{(existe)}$$

ACTIVIDAD N°10.1

Apliquemos lo aprendido

1. Representa los siguientes conjuntos en una recta numérica e indica a que limite se acercan.

N indica el conjunto de los números naturales
$\boldsymbol{N_0}$ indica los números naturales y el cero.

i. $A = \left\{\frac{1}{2^x} \; tal \; que \; x \in \boldsymbol{N}_0\right\}$

ii. $B = \left\{3 + \frac{1}{x^2} \; tal \; que \; x \in \boldsymbol{N}\right\}$

iii. $C = \left\{x + \frac{1}{x} \; tal \; que \; x \in \boldsymbol{N}\right\}$

iv. $D = \left\{\frac{x}{1+x^2} \; tal \; que \; x \in \boldsymbol{N}_0\right\}$

v. $E = \{3^x + 2x \; tal \; que \; x \in \boldsymbol{N}_0\}$

Respuestas: i. 0, ii. 3, iii. ∞, iv. 0, v.∞

2. Calcula los siguientes límites utilizando los teoremas y simplifica cuando sea necesario para encontrar el límite de la función.

1) $\lim_{x\to 5} x$

2) $\lim_{x\to 3} \pi$

3) $\lim_{x\to 1} \frac{1}{3}$

4) $\lim_{x\to -1} (3x^2 + 1)$

5) $\lim_{x\to 3} (4 - 2x)$

6) $\lim_{x\to -2} x^3$

7) $\lim_{x\to a} \left(x^2 - ax\right)$

8) $\lim_{x\to -1} \left(6x^3 - 4x^2 + 1\right)$

9) $\lim_{x\to 1/2} \left(4x^2 - 8x + 5\right)$

10) $\lim_{x\to 1/2} \left(x^3 - x^2 + x - 1\right)$

11) $\lim_{x\to 4} \frac{2x+7}{4x+1}$

12) $\lim_{x\to 0} \frac{5x^4 - 6}{x^2 + 2}$

13) $\lim_{x\to 1} (3x-1)^2$

14) $\lim_{x\to 4} \sqrt{x^2 + x + 5}$

14) $\lim_{x\to 1} (3x-1)^2$

15) $\lim_{x\to 0} \sqrt{\frac{x^2 - 4x + 18}{x+2}}$

17) $\lim_{x\to 3} \frac{x-3}{x^2 - 9}$

18) $\lim_{x\to -1} \frac{y^3 + 1}{y+1}$

19) $\lim_{x\to 5} \frac{x^2 - 7x + 10}{x - 5}$

Solución:

1) $\lim_{x\to 5} x$ = 5

2) $\lim_{x\to 3} \pi$ = π

3) $\lim_{x\to 1} \frac{1}{3}$ = $\frac{1}{3}$

4) $\lim_{x\to -1}(3x^2+1)$ = 4

5) $\lim_{x\to 3}(4-2x)$ = -2

6) $\lim_{x\to -2} x^3$ = -8

7) $\lim_{x\to a}\left(x^2-ax\right)$ = 0

8) $\lim_{x\to -1}\left(6x^3-4x^2+1\right)$ = -9

9). $\lim_{x\to 1/2}\left(4x^2-8x+5\right)$ = 2

10). $\lim_{x\to 1/2}\left(x^3-x^2+x-1\right)$ = -5/8

11). $\lim_{x\to 4}\frac{2x+7}{4x+1}$ = 15/17

12). $\lim_{x\to 0}\frac{5x^4-6}{x^2+2}$ = -3

14). $\lim_{x\to 1}(3x-1)^2$ = 4

15). $\lim_{x\to 4}\sqrt{x^2+x+5}$ = 5

16). $\lim_{x\to 0}\sqrt{\frac{x^2-4x+18}{x+2}}$ = 3

17). $\lim_{x\to 3}\frac{x-3}{x^2-9}$ = 1/6

18). $\lim_{x\to -1}\frac{y^3+1}{y+1}$ = 3

19) $\lim_{x\to 5}\frac{x^2-7x+10}{x-5}$ =

11.2 LÍMITES UNILATERALES

El símbolo $\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{a}^+$ significa que x se aproxima $\underline{\boldsymbol{a}}$ por la derecha, es decir, se realiza a través de un acercamiento progresivo al valor de $\underline{\boldsymbol{a}}$ mediante números mayores que él; además, $\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{a}^-$ significa que x se aproxima $\underline{\boldsymbol{a}}$ por la izquierda, es decir se realiza a través de un acercamiento progresivo al valor de $\underline{\boldsymbol{a}}$ mediante números menores que él.

Veamos sus definiciones en términos matemáticos:

- Sea f una función que está definida en todos los números de algún intervalo abierto $(\boldsymbol{a}, c)$. Entonces el límite de $f(x)$ cuando x se aproxima a $\boldsymbol{a}$ por la derecha es **L**, y se denota $\lim_{x\to a^+} f(x) = L$
- Sea f una función que está definida en todos los números de un intervalo abierto $(d, \boldsymbol{a})$. Entonces el límite de $f(x)$ cuando x se aproxima a $\boldsymbol{a}$ por la izquierda es **L** y se denota $\lim_{x\to a^-} f(x) = L$

a) Si para alguna función $\boldsymbol{f(x)}$, $\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^-} f(x) = L$, ***entonces se dice que*** $\lim_{x\to a} f(x) = L$

b) Si el $\lim_{x\to a^+} f(x) \neq \lim_{x\to a^-} f(x)$, ***entonces el*** $\lim_{x\to a} f(x)$ ***no existe.***

Lo anterior descrito quiere decir que una función f tiene límite $\boldsymbol{L}$ cuando x tiende a $\boldsymbol{a}$. Podemos decir, que su límite existe, si existe el límite por la izquierda y el límite por la derecha, y si ambos límites $(\boldsymbol{L})$ son iguales. Si estos límites son diferentes entonces concluimos que el límite de la función no existe.

OBSERVEMOS DETENIDAMENTE EL SIGUIENTE EJEMPLO:

Considere la función H definida así:

$$H(x) = \begin{cases} x+4\,, & para\; x \leq -4 \\ 4-x, & para\; x > -4 \end{cases}$$

Representa de forma gráfica la función y analiza qué sucede a medida nos acercamos más y más al valor indicado, pretendiendo con esto hallar los siguientes límites, si existen. Veamos:

a) $\lim\limits_{x \to -4} H(x)$ b) $\lim\limits_{x \to 0} H(x)$

SOLUCIÓN:

Los límites por la izquierda y por la derecha se verifican de forma numérica, con una tabla de valores de entrada y de salida, y en forma gráfica. Así:

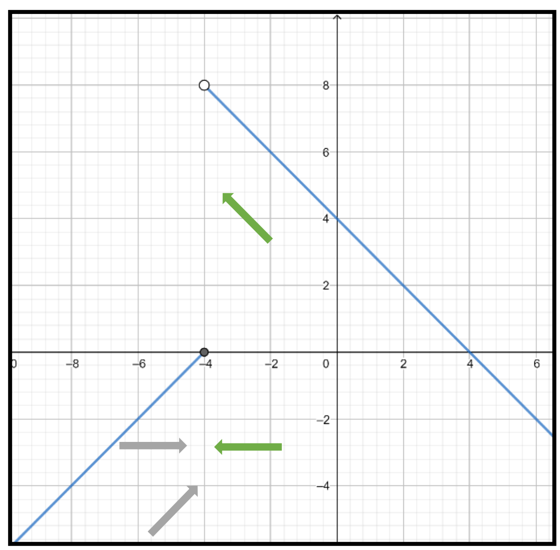
a) $\lim\limits_{x \to -4} H(x)$

DETERMINACIÓN NUMÉRICA DE LIMITE

$x \to -4^-\ (x < -4)$	$H(x)$
-5	-1
-4,9	- 0,9
- 4,5	- 0,5
- 4,1	- 0,1
- 4,01	- 0,01
- 4,001	- 0,001

$x \to -4^+\ (x > -4)$	$H(x)$
-3	7
-3,1	7,1
-3,5	7.5
-3,9	7,9
-3,99	7,99
-3,999	7,999

DETERMINACIÓN GRÁFICA DE LIMITE



Observa que a medida que los valores de entrada tienden a - 4 por la izquierda, los valores de salida $H(x)$ tienden a 0, de manera que el límite por la izquierda es 0, es decir $\lim\limits_{x \to -4^-} H(x) = 0$; y a medida que los valores de entrada tienden a - 4 por la derecha, los valores de salida $H(x)$ tienden a 8, por lo tanto, el límite por la derecha es 8, es decir $\lim_{x \to -4^+} H(x) = 8$

Puesto que el límite por la izquierda, 0, no es el mismo límite por la derecha, 8, se dice que: $\lim_{x \to -4} H(x) \quad no\ existe$

Es Importante señalar que $H(-4) = 0$, pero el límite no es cero. El valor de la función existe, pero el límite no.

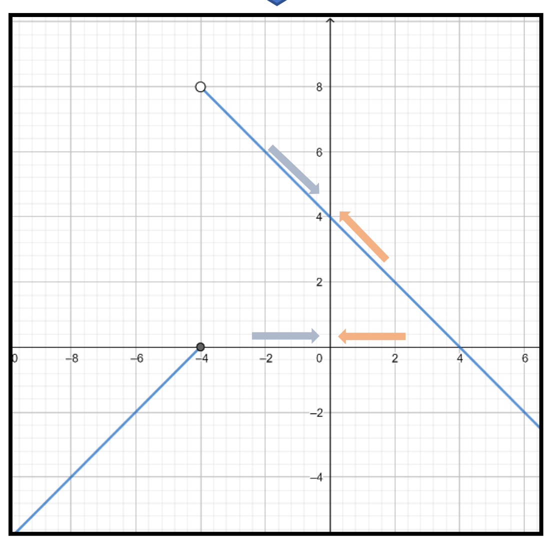
b) $\lim_{x \to 0} H(x)$

DETERMINACIÓN NUMÉRICA DE LIMITE

$x \to 0^- \ (x < 0)$	$H(x)$
-1	3
- 0,5	3,5
- 0,1	3,9
- 0,01	3,99
- 0,001	3,999

$x \to 0^+ \ (x > 0)$	$H(x)$
1	3
0,5	3,5
0,1	3,9
0,01	3,99
0,001	3,999

DETERMINACIÓN GRÁFICA DE LIMITE



Observa que a medida que los valores de entrada tienden a 0 por la izquierda, los valores de salida $H(x)$ tienden a 4, de manera que el límite por la izquierda es 4, es decir $\lim_{x \to 0^-} H(x) = 4$; y a medida que los valores de entrada tienden a 0 por la derecha, los valores de salida $H(x)$ tienden a 4, por lo tanto, el límite por la derecha es 4, es decir $\lim_{x \to 0^+} H(x) = 4$

Puesto que el límite por la izquierda, 4, es el mismo límite por la derecha, 4, se dice que: $\lim_{x \to 0} H(x) = 4 \qquad existe$

Veamos otros ejemplos:

1. $f(x) = \begin{cases} 2x - 1 & si \quad x \le 2 \\ x^2 & si \quad x > 2 \end{cases}$ encontrar $\underset{x \to 2}{lím} f(x)$

$\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^-} (2x - 1) = 2(2) - 1 = 4 - 1 = 3$

$\lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2^+} x^2 = (2)^2 = 4$

Como $\lim_{x \to 2^-} f(x) \ne \lim_{x \to 2^+} f(x)$, entonces: $\lim_{x \to 2} f(x)$ no existe.

2. $h(x) = \begin{cases} 3x + 2 & si \quad x < 1 \\ 0 & si \quad x = 1 \\ x^2 + 4 & si \quad x > 1 \end{cases}$ encontrar $\underset{x \to 1}{lím} h(x)$

$\lim_{x \to 1^-} h(x) = \lim_{x \to 1^-} (3x + 2) = 3(1) + 2 = 5$

$\lim_{x \to 1^+} h(x) = \underset{x \to 1^+}{lím} (x^2 + 4) = (1)^2 + 4 = 5$

Como $\lim_{x \to 1^-} h(x) = \lim_{x \to 1^+} h(x) = 5$, entonces: $\underset{x \to 1}{lím} h(x) = 5$.

3. $f(x) = \begin{cases} x^2 - x + 1 & si \quad x < 0 \\ 5x + 1 & si \quad x \ge 0 \end{cases}$ encontrar $\lim_{x \to 0} f(x)$

$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} (x^2 - x + 1) = (0)^2 - (0) + 1 = 1$

$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} (5x + 1) = 5(0) + 1 = 1$

Como $\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^+} f(x) = 1$, entonces: $\lim_{x \to 0} f(x) = 1$

11.3 LÍMITES INFINITOS

Se dice que existe limite infinito cuando la función $f(x)$ llega a valores que crecen continuamente, es decir que se puede hacer la función tan grande como queramos. En cambio, se dice que f(x) diverge a infinito. Para ello, el valor al que tienda la variable independiente x puede tanto un numero finito, como tender al infinito (límites al infinito).

Teorema 1: Si $\lim_{x \to a} f(x) = 0$ y $\lim_{x \to a} g(x) = c$

Si a un número real cualquiera y c una constante diferente de cero, entonces:

Si $c > 0$ y $f(x) \to 0$ a través de ***valores positivos*** de ***f(x)***: $\lim_{x \to a} \dfrac{g(x)}{f(x)} = +\infty$

Ejemplo: $\lim_{x \to 5^+} \dfrac{x^2 - 3x + 1}{x - 5} = \dfrac{(5)^2 - 3(5) + 1}{(5) - 5} = \dfrac{25 - 15 + 1}{5 - 5} = \dfrac{11}{0} = +\infty$

Observación: $g(x) = x^2 - 3x + 1$ y $f(x) = x - 5$, por consiguiente $\lim_{x \to 5^+} g(x) = 11 > 0$ y

$\lim_{x \to 5^+} f(x) = 0$, por lo tanto $\lim_{x \to a} \dfrac{g(x)}{f(x)} = +\infty$.

Si $c > 0$ y $f(x) \to 0$ a través de ***valores negativos*** de ***f(x):*** $\lim_{x \to a} \dfrac{g(x)}{f(x)} = -\infty$

Ejemplo: $\lim_{x \to 3^-} \dfrac{x + 1}{x^2 - 2x - 3} = \dfrac{(3) + 1}{(3)^2 - 2(3) - 3} = \dfrac{3 + 1}{9 - 6 - 3} = \dfrac{4}{0} = -\infty$

Si $c < 0$ y $f(x) \to 0$ a través de ***valores positivos*** de ***f(x):*** $\lim_{x \to a} \dfrac{g(x)}{f(x)} = -\infty$

Ejemplo: $\lim_{x \to -1^+} \dfrac{3x^2 - x - 5}{x^2 - 1} = \dfrac{3(-1)^2 - (-1) - 5}{(-1)^2 - 1} = \dfrac{3 + 1 - 5}{1 - 1} = \dfrac{-1}{0}$

Si $c < 0$ y $f(x) \to 0$ a través de ***valores negativos*** de ***f(x):*** $\lim_{x \to a} \dfrac{g(x)}{f(x)} = +\infty$

Ejemplo: $\lim_{x \to 2^-} \dfrac{x^2 - 4x + 1}{x - 2} = \dfrac{(2)^2 - 4(2) + 1}{(2) - 2} = \dfrac{4 - 8 + 1}{2 - 2} = \dfrac{-3}{0} = +\infty$

Teorema 2: ***Si r es cualquier entero positivo, entonces:***

$\lim_{x \to 0} \dfrac{1}{x^r} = \infty$ *Ejemplo:* $\lim_{x \to 0} \dfrac{1}{x^7} = \infty$

$\lim_{x \to 0^+} \dfrac{1}{x^r} = +\infty$ *Ejemplo:* $\lim_{x \to 0^+} \dfrac{1}{x^5} = +\infty$

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{1}{x^r}=\begin{cases}-\infty & si\ \ r\ \ es\ \ impar\\ +\infty & si\ \ r\ \ es\ \ par\end{cases}$$ *Ejemplos:* $\lim_{x\to 0^-}\frac{1}{x^3}=-\infty$ y $\lim_{x\to 0^-}\frac{1}{x^4}=+\infty$

Teorema 3:

A. ***Si r es cualquier entero positivo, entonces:***

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{1}{x^r}=0$$

$$\lim_{x\to -\infty}\frac{1}{x^r}=0$$

B. Límites en el infinito de una función racional. Recordemos que una función racional es el cociente de dos polinomios.

Sea $f(x)=\dfrac{P_m(x)}{q_n(x)}$ en donde $m\ y\ n$ son los grados de los polinomios.

Si $m < n$, $\lim_{x\to\infty} f(x)=0$

Ejemplo: $\lim_{x\to\infty}\dfrac{x+1}{x^2+4}$ Aplicando el teorema, por lo tanto, el grado es 1, es decir m = 1;

$q_n(x)=x^2+4$, el grado es dos, **n** = 2. Luego, como $m < n$.

También se puede dividir numerador y denominador por la máxima potencia y se aplica la parte **A** del Teorema. $$\lim_{x\to\infty}\frac{x+1}{x^2+4}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x}{x^2}+\frac{1}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2}+\frac{4}{x^2}}=\frac{\frac{1}{x}+0}{1+0}=\frac{0}{1}=0$$

Si $m > n$, $\lim_{x\to\infty} f(x)=\pm\infty$

El signo apropiado se determina mediante los polinomios $p_m(x)\ \ y\ \ q_n(x)$; si ellos tienen el mismo signo cuando x se hace mayor el cociente es positivo; si ellos tienen signos diferentes el cociente es negativo.

Ejemplo: $\lim_{x\to\infty}\dfrac{x^3-2x^2+3x+4}{3x+5}=+\infty$

Si $\boldsymbol{m} = \boldsymbol{n}$, $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \frac{a}{b}$ donde $\boldsymbol{a}$ es el coeficiente de x^m en el numerador y $\boldsymbol{b}$ es el coeficiente de x^n en el denominador.

Ejemplo: $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^3 - 4x + 1}{3x^3 + 2x + 7} = \dfrac{1}{3}$

ACTIVIDAD N° 10.2

Apliquemos lo aprendido

Calcula los siguientes límites, aplicando el procedimiento correspondiente en cada caso.

A. Límites Unilaterales.

1) $f(x) = \begin{cases} x^2 & si \quad x \le 1 \\ x + 2 & si \quad x > 1 \end{cases}$ encontrar $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$

2) $h(x) = \begin{cases} x^2 - x + 1 & si \quad x < 0 \\ 2 & si \quad x = 0 \\ x + 1 & si \quad x > 0 \end{cases}$ encontrar $\lim\limits_{x\to 0} h(x)$

3) $f(x) = \begin{cases} 3x - 1 & si \quad x \le 2 \\ x^2 - 1 & si \quad x > 2 \end{cases}$ encontrar $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$

4) $h(x) = \begin{cases} 4 - x^2 & si \quad x \le 1 \\ 2 + x^2 & si \quad x > 1 \end{cases}$ encontrar $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$

B. ***Límites Infinitos.***

5) $\lim\limits_{x\to 5^-} \dfrac{x^2 - 4x + 7}{x - 5}$

6) $\lim\limits_{x\to -1^+} \dfrac{x^2 + 3x + 1}{x + 1}$

7) $\lim\limits_{x\to -5^+} \dfrac{x^2 - 5x + 3}{x + 5}$

8) $\lim\limits_{x\to -2^+} \dfrac{x^2 + x - 8}{x + 2}$

9) $\lim_{x \to 3^-} \frac{x^2 - x + 1}{x - 3}$

10) $\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 - 5x + 3}{4x^2 - 9}$

11) $\lim_{x \to \infty} \frac{5x^4 + x^2 + 7}{3x^5 + x^3 + x}$

12) $\lim_{x \to \infty} \frac{4x^3 + 2x - 2}{6x^2 + 5x + 1}$

13) $\lim_{x \to \infty} \frac{2x + 3}{4x - 5}$

$\lim_{x \to \infty} \frac{4x^3 - 3x + 2}{2x - 4}$

A continuación, un sitio bastante práctico para aclarar el concepto de límite, solo hay que tomarse un poco de tiempo.

https://www.youtube.com/watch?v=voeUOct5VjY&list=PL3KGq8pH1bFRZGsOynzJZ4uzAFUuX4GcE

TEMA 11. LA DERIVADA

El problema de encontrar la recta tangente a una curva y el problema de encontrar la velocidad de un objeto, involucran encontrar el mismo tipo de límite. Esta clase especial de límite se denomina derivada y puede ser interpretada como una razón de cambio en cualquiera de las ciencias o ingeniería.

Definición:

Sea $f : R \rightarrow R$ la derivada de la función $f(x)$ es aquella función denotada $por\ f(x)$ tal que su valor de función en cualquier número x en el dominio de $f(x)$ está dado por:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$ **, si este límite existe.**

Es decir, la derivada de una función $y = f(x)$ es una función $f(x)$ definida como el límite.

Observaciones:

a) $f\,'(x)$ es una nueva función, y al evaluarlo en un valor del dominio, se obtendrá un número que puede representar la pendiente de la recta tangente a $f(x)$ en ese punto o si $f(x)$ es la ecuación de movimiento de una $partícula\ f\,'(x)$ evaluada en un tiempo t_0, representará la velocidad instantánea en t_0, o si $f(x)$ es la ecuación costo total , $f\,'(x)$ evaluada en $x = x_1$ representará el costo marginal x_1.

b) La derivada de una función $y = f(x)$ se denota de diversas formas $f'(x)$, $f'(x),\ Df,\ Dxf,\ \frac{dy}{dx},\ DxY,\ Y'$

REGLAS DE DERIVACIÓN

Teorema A. DERIVADA DE UNA CONSTANTE

Si c es una constante y si $f(x) = c$ para todo x, entonces $f\,'(x) = 0$.

Ejemplos: $f(x) = 100$ $\qquad$ $g(x) = -5$

$f\,'(x) = 0$ $\qquad$ g’(x) = 0

Teorema B. DERIVADA DE LA FUNCIÓN x^n

Si n es un número entero y si $f(x) = x^n,\ entonces\quad f\,'(x) = nx^{n-1}$.

Ejemplos: $f(x) = x^8$ $\quad$ $f(x) = x^{-4}$ $\quad$ $f(x) = x^{1/2}$

$f'(x) = 8x^7$ $\quad$ $f'(x) = -4x^{-4-1}$ $\quad$ $f'(x) = \frac{1}{2}x^{1/2-1} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2}x^{-1/2}$

$f'(x) = -4x^{-5}$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Teorema C. DERIVADA DE LA SUMA

Si f y g son funciones y h es la función definida por $h(x) = f(x) + g(x)$, entonces si $f'(x)$ y $g'(x)$ **existen la derivada será** $\boldsymbol{h'(x) = f'(x) + g'(x)}$.

En forma general: la derivada de la suma de un número finito de funciones es igual a la suma de sus derivadas si estas existen.

Ejemplo:

Sea $f(x) = 7x^4 - 2x^3 + 8x + 5$ encontrar $f'(x)$.

$$f'(x) = 7 \cdot 4x^3 - 2 \cdot 3x^2 + 8$$
$$f'(x) = 28x^3 - 6x^2 + 8$$

Teorema D. DERIVADA DEL PRODUCTO

Si f y g son funciones y h es la función definida por $h(x) = f(x) \cdot g(x)$, entonces si $f'(x)$ y $g'(x)$ existen $h'(x) = f(x) \cdot g'(x) + f'(x) \cdot g(x)$.

Ejemplo:

Dada $h(x) = (2x^3 - 4x^2)(3x^5 + x^2)$, obtener $h'(x)$.

$$h'(x) = (2x^3 - 4x^2)(3x^5 + x^2)' + (2x^3 - 4x^2)'(3x^5 + x^2)$$
$$h'(x) = (2x^3 - 4x^2)(15x^4 + 2x) + (6x^2 - 8x)(3x^5 + x^2)$$

$$h'(x) = (30x^7 - 60x^6 + 4x^4 - 8x^3) + (18x^7 - 24x^6 - 8x^3 + 6x^4)$$
$$h'(x) = 48x^7 - 84x^6 + 10x^4 - 16x^3$$

Teorema E. DERIVADA DEL COCIENTE

Si f y g son funciones y h es la función definida por $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$, $g(x) \neq 0$, entonces si $f'(x)$ y $g'(x)$ existen $h'(x) = \dfrac{g(x) \cdot f'(x) - g'(x) \cdot f(x)}{[g(x)]^2}$.

Ejemplo:

Sea $h(x) = \dfrac{2x^3 + 4}{x^2 - 4x + 1}$, determinar $h'(x)$

$$h'(x) = \frac{(x^2 - 4x + 1)(2x^3 + 4)' - (x^2 - 4x + 1)'(2x^3 + 4)}{(x^2 - 4x + 1)^2}$$

$$h'(x) = \frac{(x^2 - 4x + 1)(6x^2) - (2x - 4)(2x^3 + 4)}{(x^2 - 4x + 1)^2}$$

$$h'(x) = \frac{(6x^4 - 24x^3 + 6x^2) - (4x^4 - 8x^3 + 8x - 16)}{(x^2 - 4x + 1)^2}$$

$$h'(x) = \frac{6x^4 - 24x^3 + 6x^2 - 4x^4 + 8x^3 - 8x + 16}{(x^2 - 4x + 1)^2}$$

$$h'(x) = \frac{2x^4 - 16x^3 + 6x^2 - 8x + 16}{(x^2 - 4x + 1)^2}$$

REGLA DE LA CADENA

Si $\boldsymbol{y}$ es una función de $\boldsymbol{u}$, definida por $\boldsymbol{y} = f(u)$ y $D_u y$ existe, y si $\boldsymbol{u}$ es una función de $\boldsymbol{x}$, definida por $\boldsymbol{u} = g(x)$ y $D_x u$ existe, entonces $\boldsymbol{y}$ es una función de $\boldsymbol{x}$ y $D_x y$ existe y está definida por:

$$D_x y = D_u y D_x u$$

$$F(x) = (2x^2 - 4x + 1)^{60}$$

Solución: **1)** $F(x) = (2x^2 - 4x + 1)^{60}$ sea $u = 2x^2 - 4x + 1$ $D_x u =$ $4x - 4$

$$F(x) = u^{60}$$

$$F'(x) = 60u^{59} \cdot D_x u$$

$$F'(x) = 60(2x^2 - 4x + 1)^{59}(4x - 4)$$

2) $y = \dfrac{1}{(2x^5 - 7)^3}$

Solución: $y = \dfrac{1}{(2x^5 - 7)^3}$

sea $u = 2x^5 - 7 \quad D_x u = 10x^4$

$y = \dfrac{1}{u^3} \quad \Rightarrow \quad y = u^{-3}$ luego, $y' = -3u^{-4} \cdot D_x u$

$$y' = -3(2x^5 - 7)^{-4} \cdot 10x^4$$

$$y' = \frac{-30x^4}{(2x^5 - 7)^4}$$

ACTIVIDAD N°11

Apliquemos lo aprendido

1. Calcula la primera derivada en cada una de las siguientes funciones

1) y = 4

2) y = 5x – 3

3) $y = x^2$

4) $y = x^3$

5) $y = \sqrt{x}$

6) $y = x^{5/4}$

7) $y = \dfrac{1}{x^{1/3}}$

8) $y = 5x^2 - 3x + 1$

9) $y = \dfrac{4}{\sqrt{x}}$

10) $y = (2x - 1)^5$

11) $y = \sqrt{x^2 + 1}$

12) $y = \dfrac{1}{(5x + 3)^{1/4}}$

13) $y = \sqrt[3]{3x^2 - 1}$

14) $y = (2x - 1)(3x + 2)$

15) $y = x^2\sqrt{1 - 4x}$

16) $y = \dfrac{3x - 1}{2 - 5x}$

17) $y = x^2(3x - 1)^2$

18) $y = (x^2 - 3)(2x + 5)$

19) $y = (x^2 - 4x + 1)^{3/2}$

20) $y = \dfrac{1 - 2x}{x^2 + x - 3}$

21) $y = \left(\dfrac{x - 7}{x + 2}\right)^2$

AUTOEVALUACIÓN A-2

Estimados Alumnos(as): con el propósito de favorecer el desarrollo de la guía de aprendizaje, le presentamos la autoevaluación de la unidad 3.

La autoevaluación induce a que "los alumnos desarrollen el hábito de la reflexión, y la identificación de los propios errores, cuestión fundamental cuando se trata de formar personas con capacidad para aprender de forma autónoma". (Valero-García, M., & de Cerio, L. M. D. 2005, p.27)

La siguiente tabla debe ser completada al culminar todos los temas, evalúese y propóngase nuevas metas en el aprendizaje. Las preguntas van conectadas a una escala que usted considerará según el trabajo realizado hasta el momento. Esta evaluación es cualitativa.

- Al completar la unidad 3, autoevalúese según la siguiente escala de logros:

Lo he logrado	Lo estoy logrando	Estoy intentando lograrlo	No lo he Logrado
5	4	3	2

AL CONCLUIR LA GUÍA DE APRENDIZAJE CONSIDERO QUE:	COLOQUE UN NÚMERO SEGÚN LA ESCALA
En la asimilación de todos los conceptos	
En la actitud positiva ante los retos al desarrollar los ejercicios	
En incrementar mi curiosidad por investigar y descubrir cosas nuevas	
En mejorar mi capacidad para resolver problemas	
En hacer buen uso de las TIC's para profundizar e investigar con las diferentes plataformas educativas	
En seguir las indicaciones y sugerencias de la guía de aprendizaje	
En hacer buen uso del tiempo para resolver las tareas	
En conectar los temas con la vida diaria	
TOTAL DE PUNTOS →	

3 | ESTADÍSTICA Y PROBABILIDAD

TEMA 12. ANÁLISIS COMBINATORIO

El análisis combinatorio, o cálculo combinatorio, permite enumerar tales casos o sucesos y así obtener la probabilidad de eventos más complejos. El objeto del Análisis combinatorio o Combinatoria es el estudio de las distintas ordenaciones que pueden formularse con los elementos de un conjunto, de los distintos grupos que pueden formarse con aquellos elementos y de las relaciones entre unos y otros grupos.

Los diferentes tipos de muestra vienen determinados por dos aspectos:

- Orden: Es decir, si es importante que los elementos de la muestra aparezcan ordenados o no.
- Repetición: La posibilidad de repetición o no de los elementos.

• Factorial de un número natural

Es el producto de los "n" factores consecutivos desde "n" hasta 1. El factorial de un número se denota por n!.

$$n! = n(n-1)(n-2)(n-3)\ldots 3 \cdot 2 \cdot 1$$

Recordemos que 0! =1

Ejemplo 1: Calcule el factorial de 4.

$$4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$$

• Permutaciones

Se llama permutaciones de $\boldsymbol{m}$ elementos ($\boldsymbol{m} = \boldsymbol{n}$) a las diferentes agrupaciones de esos $\boldsymbol{m}$ elementos de forma que:

- **Sí se consideran todos los elementos.**
- **Sí importa el orden.**
- **No se repiten los elementos.**

$$P_n = n!$$

Ejemplo 1: Calcule las permutaciones de 5 elementos.

Solución:

$$\boldsymbol{P_5} = 5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$$

Ejemplo 2: Una empresa necesita crear una clave de seis cifras numéricas diferentes para sus 600 empleados. ¿Cuántos números de 6 cifras diferentes se puede formar con los dígitos: $1, 2, 3, 4, 5,6$?

Solución:

$$m = 6 \quad n = 6$$

Analicemos:

¿Entran todos los elementos?.	Sí porque requiere de 6 cifras diferentes.
¿Importa el orden?	Sí, ya que no es lo mismo la clave 123456 que 654321
¿Se repiten los elementos?.	No, El enunciado nos pide que las cifras sean diferentes.

$$\boldsymbol{P_6} = 6! = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$$

Ejemplo 3: ¿De cuántas formas distintas pueden sentarse ocho personas en una fila de butacas?

Solución:

Analicemos:

¿Entran todos los elementos?.	Sí porque Tienen que sentarse las 8 personas.
¿Importa el orden?	Sí importa el orden
¿Se repiten los elementos?.	No se repiten los elementos. Una persona no se puede repetir.

$$\boldsymbol{P_8} = 8! = 40320$$

• Permutaciones con repetición

Permutaciones con repetición de n elementos donde el primer elemento se repite a veces, el segundo b veces, el tercero c veces, ...

$$n = a + b + c + \ldots$$

Son los distintos grupos que pueden formarse con esos n elementos de forma que cumplan con los parámetros siguientes:

- Sí **entran todos los elementos**.
- Sí **importa el orden**.
- **Sí se repiten** los elementos.

$$PR_n^{a,b,c..} = \frac{P_n}{a!\,b!\,c!..}$$

Ejemplos 4: Con las cifras 2, 2, 2, 3, 3, 3, 3, 4, 4; ¿cuántos números de nueve cifras se pueden formar

Solución:

$$m = 9 \quad a = 3 \quad b = 4 \quad c = 2 \quad a + b + c = 9$$

- Sí entran todos los elementos.
- Sí importa el orden.
- Sí se repiten los elementos.

$$PR_n^{a,b,c..} = \frac{P_n}{a!\,b!\,c!..} = \frac{9!}{3!\,4!\,2!} = 1260$$

Por lo cual, se pueden formar 1 260 números de 9 cifras

• Combinaciones

Se llama combinaciones de m elementos tomados de $\boldsymbol{n}$ en $\boldsymbol{n}$ $(\boldsymbol{m} \geq \boldsymbol{n})$ a todas las agrupaciones posibles que pueden hacerse con los m elementos de forma que:

- No entran todos los elementos.
- No importa el orden.
- No se repiten los elementos.

$$C_m^n = \frac{m!}{n!\,(m-n)!}$$

Las combinaciones se denotan por C_m^n o $C_{m,n}$

Ejemplo 5: Calcule el número de combinaciones de 10 elementos tomados de 4 en 4.

Solución:

- No entran todos los elementos.
- No importa el orden.
- No se repiten los elementos.

$$C_m^n = \frac{10!}{4!\,6!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6!}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 6!} = 210$$

ACTIVIDAD N°12.

_________ Apliquemos lo aprendido ________

I- Investigue cada concepto e ilustre.

1) Estadística
2) Técnica de Conteo (Diagrama de un árbol)
3) Técnica de Conteo (Permutaciones)
4) Técnica de Conteo (Combinaciones)

II. Resuelva los siguientes ejercicios[9].

1) En el palo de señales de un barco se pueden izar tres banderas rojas, dos azules y cuatro verdes. ¿Cuántas señales distintas pueden indicarse con la colocación de las nueve banderas?
2) En una clase de 35 alumnos se quiere elegir un comité formado por tres alumnos. ¿Cuántos comités diferentes se pueden formar?

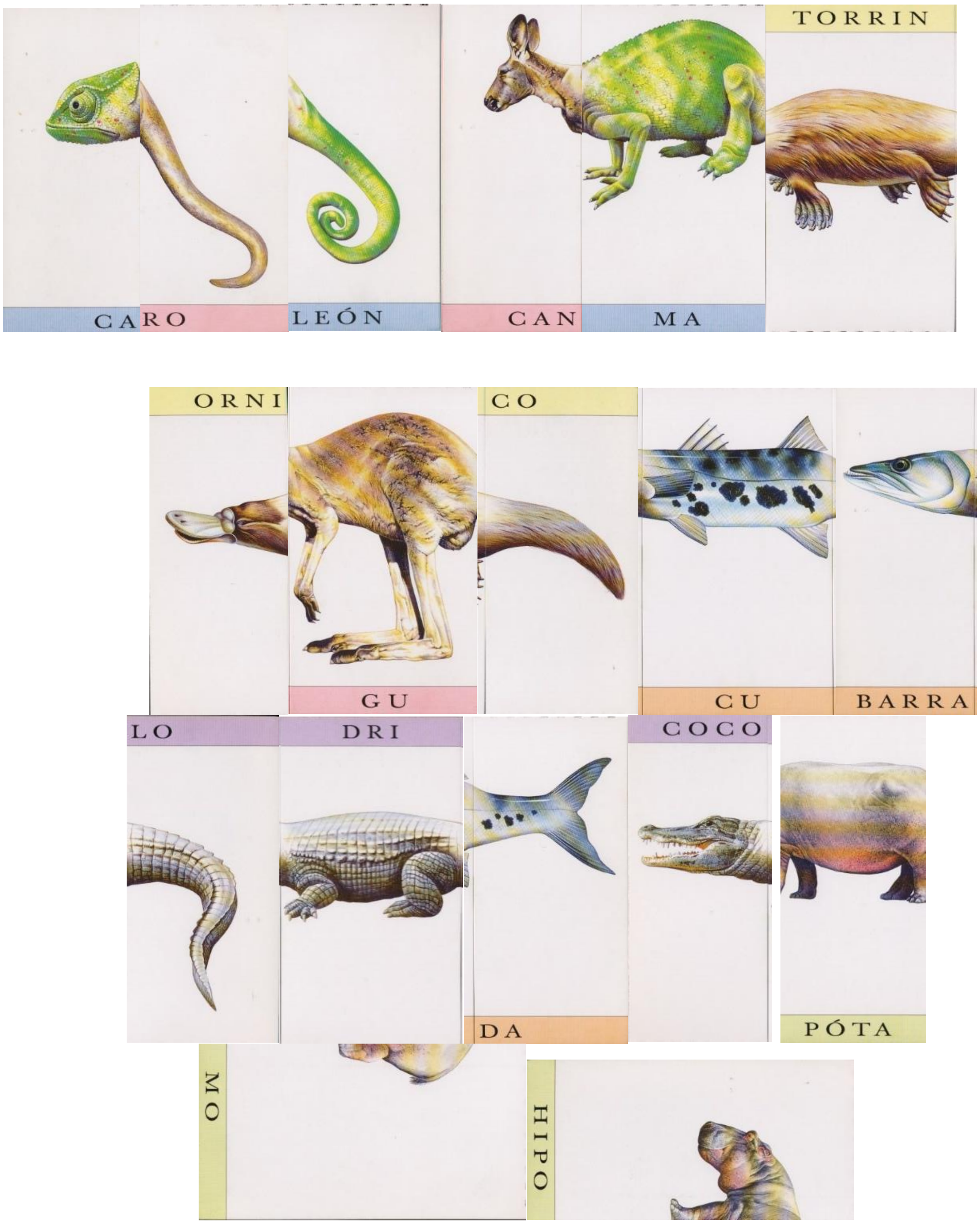
3) Determine si importa el orden de las siguientes actividades

   i. Observe las imágenes de animales recórtelas y péguelas. Al culminar determine si el concepto que ha desarrollado mediante la didáctica es permutación o combinación. Explique.

   ii. Dibuje tres frutas diferentes dentro de una canasta. Indique la cantidad de canastas posibles que podría dibujar con las frutas y determine si el concepto que ha desarrollado mediante la didáctica es permutación o combinación.

Practica en KHAN ACADEMY
https://es.khanacademy.org/math/statistics-probability/counting-permutations-and-combinations/counting-principle-factorial/e/fundamental-counting-principle?modal=1

[9] https://www.superprof.es/apuntes/escolar/matematicas/probabilidades/combinatoria/ejercicios-resueltos-de-permutaciones.html



¡Felicidades!, Ha culminado la guía

Que Dios le bendiga. ¡Éxitos!

RESPUESTAS DE LA ACTIVIDAD 12:

I-Definiciones

1) Estadística: ciencia que permite tomar decisiones, mediante un proceso de recolección, organización y análisis de los datos.
2) Técnica de conteo (diagrama de un árbol):
   es una herramienta que se utiliza para determinar todos los posibles resultados de un experimento aleatorio. En el cálculo de la probabilidad se requiere conocer el número de elementos que forman parte del espacio muestral, estos se pueden determinar con la construcción del diagrama de árbol.
3) Técnica de conteo (permutaciones):
   es todo arreglo de elementos en donde nos interesa el lugar o posición que ocupa cada uno de los elementos que constituyen dicho arreglo.
4) Técnica de conteo (combinaciones):es todo arreglo sin orden de cualquier objeto, letra o número.

II- Resuelva los siguientes ejercicios.

1) Sí entran todos los elementos, Sí importa el orden, Sí se repiten los elementos.

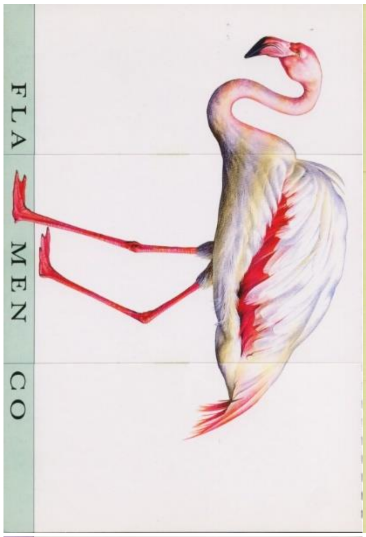
$$PR_n^{a,b,c..} = \frac{P_n}{a!\,b!\,c!..} = \frac{9!}{3!\,4!\,2!} = 1260$$

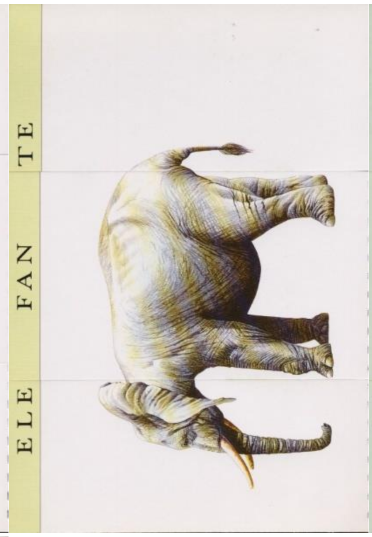
2) No entran todos los elementos. No importa el orden: Moy, Naty. No se repiten los elementos.

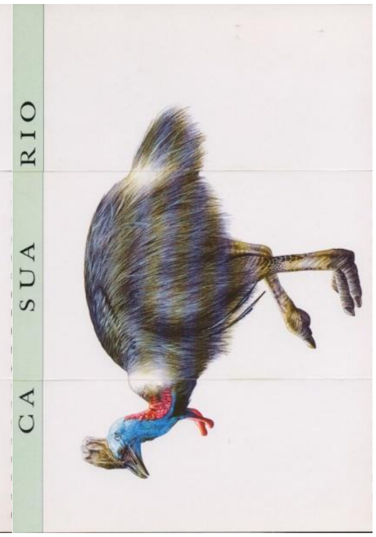
$$C_{35}^{3} = 6\,545$$

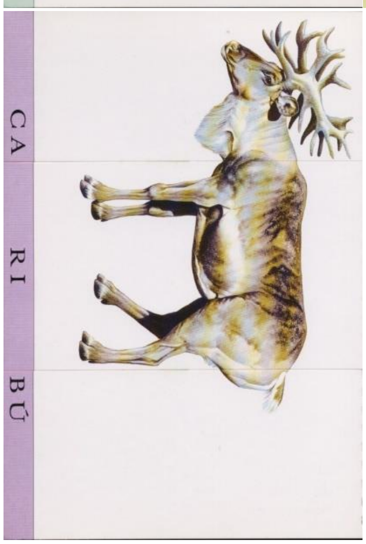
3) Determine si importa el orden de las siguientes actividades
   a. Si importa
   b. No importa

Fichas para Talleres de aula









BIBLIOGRAFÍA

- Leithold, L. **El Cálculo**. Séptima Edición. Oxford University Press.
- Prado, C., Santiago, R., y otros. 2009. **Matemáticas 12**. Pearson Education
- Solis, P.; Robles, I. (2006) **Fundamentos de Calculo Diferencial e Integral. Primera Edición. Panamá. Editora Ivamar, S.A**
- Stewart, Redlin, Watson **(2012).** Pre cálculo, Matemáticas para el cálculo. Sexta Edición. ISBN: 978 – 607 – 481-826-0
- Sullivan, M. **Trigonometría y Geometría Analítica**. IV Edición. Prentice Hall. INC

REPÚBLICA DE PANAMÁ
GOBIERNO NACIONAL

MINISTERIO DE EDUCACIÓN