

**Ministerio de Educación  
Dirección Regional de Panamá Este  
I.P. T. México- Panamá  
Departamento de Matemática**

**Material de Aprendizaje a Distancia  
11<sup>vo</sup> Grado  
Bachiller en Ciencias y Agropecuaria**

**11° E, F, G, H  
Profesora: Shanthall González**

*Tel. 6522-1736*

*[shanthall.gonzalezmexicopanama@gmail.com](mailto:shanthall.gonzalezmexicopanama@gmail.com)*

**11° D  
Profesora: Diocelinda Sanjur**

*Tel. 6159-4581*

*[diocelindasanjur@gmail.com](mailto:diocelindasanjur@gmail.com)*

**Tercer Trimestre  
2022**

**Fechas de entrega:**

**Viernes 28 de octubre → *Actividad sumativa #1***

**Viernes 2 de diciembre → *Actividad apreciación #1*  
→ *Actividad sumativa #2***

**Viernes 16 de diciembre → *Actividad sumativa #3*  
→ *Actividad de apreciación #2***

**Indicaciones Generales:**

- ❖ Sea puntual, claro y ordenado en la entrega y solución de sus ejercicios.
- ❖ Entregue los talleres en las hojas correspondientes, no olvide colocar su nombre y grupo en los mismos. Debe desarrollar a mano los problemas para ser evaluado.
- ❖ Cada taller tiene puntos por puntualidad y orden y aseo. Son los puntos adicionales que se contabilizan en cada taller.

# TEMA#1. MATRICES (Área Álgebra)

Las matrices se presentaron por primera vez en 1858 y resultaron ser una gran herramienta en muchas áreas tales como la física atómica, dinámica de fluidos y en los negocios.

La matriz es un arreglo rectangular de números reales, los números reales de una matriz se llaman elementos y se ordenan en filas o columnas.

Las matrices pueden ser de cualquier orden, el orden de una matriz se define por el número de filas multiplicado por el número de columnas, recibe también el nombre de dimensión o tamaño.

Las matrices se denotan por letras mayúsculas y sus elementos por letras minúsculas.

La diagonal principal de una matriz cuadrada contiene los elementos de la línea oblicua de esquina a esquina que empieza en la superior izquierda. Este elemento solo lo podemos identificar en las matrices cuadradas.

## Ejemplo:

La forma de representar una matriz  $m \times n$  es la siguiente y a la cual se le llama matriz de orden  $m \times n$ .

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}_{m \times n}$$

← **Columnas**      ← **Filas**      ↩ **Orden de la matriz**

El elemento  $a_{11}$  se ubica en la fila 1 columna 1, el elemento  $a_{12}$  se ubica en la fila 1 columna 2, el elemento  $a_{21}$  se ubica en la fila 2 columna 1 y el elemento  $a_{22}$  se ubica en la fila 2 columna 2, de esta manera se nombran los elementos de la matriz para encontrar su posición.

El primer número indica fila y el segundo la columna

$$B = \begin{bmatrix} 8 & 5 & -12 & 1 \\ 3 & -4 & 9 & 2 \\ -2 & 3 & 1 & 9 \\ 6 & 7 & -2 & 0 \end{bmatrix}_{4 \times 4}$$

↖ **Diagonal Principal**

Complete los espacios con de los elementos correspondientes de la matriz anterior.

$$b_{11} = \_ \quad b_{12} = \_ \quad b_{13} = \_ \quad b_{14} = \_ \quad b_{22} = \_ \quad b_{24} = \_ \quad b_{32} = \_ \quad b_{43} = \_$$

Diagonal Principal: (\_\_, \_\_, \_\_, \_\_)

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 4 & 7 \\ 8 & -1 & 4 \\ 0 & 7 & 5 \end{bmatrix}_{3 \times 3}$$

Complete los espacios con de los elementos correspondientes de la matriz anterior.

$$a_{12} = \_ \quad a_{22} = \_ \quad a_{33} = \_ \quad a_{13} = \_ \quad a_{23} = \_ \quad a_{32} = \_ \quad a_{21} = \_$$

Diagonal Principal: (\_\_, \_\_, \_\_, \_\_)

## TIPOS DE MATRICES

A continuación, se mostrarán los diferentes tipos de matrices con su ejemplo.

1. **Matriz fila:** está constituida por una sola fila.  $D = [3 \quad 6 \quad -8]_{1 \times 3}$

2. **Matriz columna:** tiene una sola columna.  $E = \begin{bmatrix} -5 \\ -3 \\ 8 \end{bmatrix}_{3 \times 1}$

3. **Matriz rectangular:** tiene distinto número de filas que de columnas.  $F = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ 1 & 8 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}_{3 \times 2}$

4. **Matriz cuadrada:** tiene igual número de filas que de columnas.  $G = \begin{bmatrix} 3 & 8 & 5 \\ -2 & 4 & 6 \\ 1 & 0 & 9 \end{bmatrix}_{3 \times 3}$

5. **Matriz nula:** todos sus elementos son cero y puede ser de cualquier tamaño.

$$N = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{2 \times 3}$$

6. **Matriz traspuesta:** se obtiene cambiando ordenadamente las filas por las columnas. Se denotan con la misma letra de la matriz original  $A$  y el índice "t" que indicara es traspuesta de  $A$ . Como se ve en el ejemplo.

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 4 & 7 & 2 \\ 8 & -1 & 4 & 5 \\ 0 & 7 & 5 & 3 \end{bmatrix}_{3 \times 4} \quad A^t = \begin{bmatrix} -3 & 8 & 0 \\ 4 & -1 & 7 \\ 7 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 3 \end{bmatrix}_{4 \times 3}$$

7. **Matriz triangular superior:** los elementos situados por debajo de la diagonal principal

son ceros.  $R = \begin{bmatrix} 3 & -12 & -8 \\ 0 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}_{3 \times 3}$

8. **Matriz triangular inferior:** los elementos situados por encima de la diagonal principal

son ceros.  $Q = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 5 & -1 & 0 \\ 4 & 2 & -2 \end{bmatrix}_{3 \times 3}$

9. **Matriz diagonal:** todos los elementos que no están situados en la diagonal principal son

ceros.  $S = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}_{3 \times 3}$

10. **Matriz escalar:** es una matriz diagonal cuyos elementos de la diagonal principal son

iguales.  $I = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}_{3 \times 3}$

**11. Matriz unidad o identidad:** es una matriz diagonal en la que los elementos de la diagonal

principal son todos uno.  $U = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{3 \times 3}$

**12. Matrices iguales:** son del mismo tamaño y sus componentes correspondientes (elementos) son iguales.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}_{3 \times 3} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}_{3 \times 3} \Rightarrow A = B \Rightarrow \boxed{\text{Entonces A es igual a B}}$$

**13. Matriz simétrica:** es una matriz cuya traspuesta es exactamente igual a la matriz original, es decir  $a_{ij} = a_{ji}$ .

$$C = \begin{bmatrix} 5 & 7 & 2 \\ 7 & -1 & 3 \\ 2 & 3 & 8 \end{bmatrix}_{3 \times 3} \quad C^t = \begin{bmatrix} 5 & 7 & 2 \\ 7 & -1 & 3 \\ 2 & 3 & 8 \end{bmatrix}_{3 \times 3} \Rightarrow C = C^t$$

**Práctica Formativa**

1-  $\begin{bmatrix} 2 & -5 & -7 \\ 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & -7 \end{bmatrix}$

2-  $\begin{bmatrix} 2 & 5 & -3 \\ 3 & -6 & 2 \\ 4 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

3-  $\begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 2 & -5 & 0 \\ 6 & 1 & 4 \end{bmatrix}$

4-  $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

5-  $[-2 \ 3 \ 5 \ 8 \ 9]$

6-  $\begin{bmatrix} 9 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

**II. Determine el orden de cada una de las siguientes matrices.**

1.  $C = \begin{pmatrix} 0 & 8 & 3 & -1 \\ -8 & 0 & 4 & -5 \\ -3 & -4 & 0 & 7 \\ 1 & 5 & -7 & 0 \end{pmatrix}$

2.  $A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix};$

3.  $B = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 5 \\ 3 & 2 & 6 \\ 2 & 3 & 7 \\ 1 & 4 & 9 \end{pmatrix}$

**III. Para las siguientes matrices determine su traspuesta y el orden de cada una y la traspuesta correspondiente:**

$E = \begin{bmatrix} 6 & 2 & -4 \\ 3 & -1 & 2 \\ 0 & 4 & 3 \end{bmatrix}_{\_\_ \times \_\_}$

$F = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 3 & 2 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}_{\_\_ \times \_\_}$

$G = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}_{\_\_ \times \_\_}$

V. Determine cuáles de las siguientes matrices son iguales, utilice la notación empleada en la definición

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 3 & -5 & 7 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -7 \\ \frac{5}{3} & -2 & 5 \\ -3 & 8 & 2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 3 & -5 & 7 \end{bmatrix} \quad \mathbf{E} = \begin{bmatrix} 3 & -5 & 7 \\ 2 & 4 & -1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{F} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -7 \\ \frac{5}{3} & -2 & 5 \\ -3 & 8 & 2 \end{bmatrix}$$

VI. Determine cuáles de las siguientes matrices son simétricas. Realice el procedimiento para verificar si son simétrica

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 9 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$$

## TEMA#2. OPERACIONES CON MATRICES

La suma de matrices fue definida en 1858 por el matemático inglés Arthur Cayley.

1. **Adición y sustracción de matrices:** la suma o resta de dos matrices  $[A]$  y  $[B]$  dará como resultado una matriz  $C$  con el mismo orden de las matrices que se suman o restan, antes de sumar o restar matrices se debe verificar que ambas sean del mismo orden, para luego sumar o restar los términos que estén en la misma posición, respetando la ley de los signos (el signo del mayor será el del resultado).

Los elementos de la matriz  $[C]$  resultante se calculan de la siguiente manera:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & -1 & -4 \end{bmatrix}_{3 \times 4} \quad B = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}_{3 \times 4} \quad \begin{matrix} [A]_{3 \times 4} + [B]_{3 \times 4} = [C]_{3 \times 4} \\ [A]_{3 \times 4} - [B]_{3 \times 4} = [D]_{3 \times 4} \end{matrix}$$

**Ejemplo de suma de matrices:**

$$C = \begin{bmatrix} 1 + (-2) & 2 + 0 & -1 + 1 & 1 + 2 \\ 2 + 3 & 3 + 2 & 0 + 0 & 2 + (-1) \\ 2 + 1 & 2 + (-1) & -1 + 1 & -4 + 0 \end{bmatrix}_{3 \times 4}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 - 2 & 2 + 0 & -1 + 1 & 1 + 2 \\ 2 + 3 & 3 + 2 & 0 + 0 & 2 - 1 \\ 2 + 1 & 2 - 1 & -1 + 1 & -4 + 0 \end{bmatrix}_{3 \times 4}$$

$$C = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 & 3 \\ 5 & 5 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & -4 \end{bmatrix}_{3 \times 4}$$

**Ejemplo de resta de matrices:**

$$D = \begin{bmatrix} 1 - (-2) & 2 - 0 & -1 - 1 & 1 - 2 \\ 2 - 3 & 3 - 2 & 0 - 0 & 2 - (-1) \\ 2 - 1 & 2 - (-1) & -1 - 1 & -4 - 0 \end{bmatrix}_{3 \times 4}$$

$$D = \begin{bmatrix} 1 + 2 & 2 - 0 & -1 - 1 & 1 - 2 \\ 2 - 3 & 3 - 2 & 0 - 0 & 2 + 1 \\ 2 - 1 & 2 + 1 & -1 - 1 & -4 - 0 \end{bmatrix}_{3 \times 4}$$

$$D = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 3 & -2 & -4 \end{bmatrix}_{3 \times 4}$$

✓ Si  $A$  es una matriz y  $O$  la matriz nula de igual orden, entonces  $A + O = O + A = A$

✓ Toda matriz  $A$  tiene su opuesta o inversa aditiva que cumple con:  $A + (-A) = O$

Algunas propiedades importantes, si  $A$ ,  $B$  y  $C$  son matrices, entonces:

$A + B = B + A$  (Propiedad conmutativa de la suma)

$(A + B) + C = A + (B + C)$  (Propiedad asociativa de la suma)

$A - B \neq B - A$  (Propiedad no conmutativa de la resta)

## Práctica Formativa

### (Suma y resta de matrices)

I. Resuelva las siguientes operaciones con matrices.

$$1. \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -4 & 1 \\ -8 & 6 \end{bmatrix} =$$

$$2. \begin{bmatrix} 2 & 6 & -2 \\ 1 & -1 & 3 \\ -5 & -7 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -7 & -6 & 5 \\ 4 & -8 & -3 \\ 0 & 2 & -3 \end{bmatrix} =$$

$$3. \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -5 & 6 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -5 & -1 \\ 3 & -6 \\ -2 & -2 \end{bmatrix} =$$

II. Determine el valor de  $x$  y de  $y$  en cada igualdad.

$$1. \begin{bmatrix} x & 13 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2 & -11 & 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 8 & y & 4 \\ 2 & -2 & 2 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 & 18 & -4 \\ -3 & 4 & -1 \\ 1 & -11 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} x = \text{---} \\ y = \text{---} \end{array}$$

III. Dadas las siguientes matrices, calcule  $B - C + A$

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 5 & 2 \\ 4 & 1 & 8 \\ 6 & -1 & 2 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 4 \\ 4 & 1 & 3 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 3 \\ 4 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

## TEMA#3. OPERACIONES CON MATRICES

1. Multiplicación de una matriz por un escalar: se resuelve multiplicando el escalar por cada uno de los elementos de la matriz. La matriz resultante mantiene el orden de la matriz original.

**Ejemplo#1:**

$$r = -3 \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 3 & -2 & 2 \\ 5 & -1 & 0 \end{bmatrix}_{3 \times 3}$$

$$rC = \begin{bmatrix} (-3)1 & (-3)4 & (-3)3 \\ (-3)3 & (-3)-2 & (-3)2 \\ (-3)5 & (-3)-1 & (-3)0 \end{bmatrix}_{3 \times 3}$$

$$rC = \begin{bmatrix} -3 & -12 & -9 \\ -9 & 6 & -6 \\ -15 & 3 & 0 \end{bmatrix}_{3 \times 3}$$

**Ejemplo#2:**

$$r = \frac{1}{2} \quad B = \begin{bmatrix} 10 & 8 & -2 \\ -6 & 2 & 22 \\ 40 & -16 & -50 \end{bmatrix}_{3 \times 3}$$

$$rB = \begin{bmatrix} \left(\frac{1}{2}\right)10 & \left(\frac{1}{2}\right)8 & \left(\frac{1}{2}\right)-2 \\ \left(\frac{1}{2}\right)-6 & \left(\frac{1}{2}\right)2 & \left(\frac{1}{2}\right)22 \\ \left(\frac{1}{2}\right)40 & \left(\frac{1}{2}\right)-16 & \left(\frac{1}{2}\right)-50 \end{bmatrix}_{3 \times 3}$$

$$rB = \begin{bmatrix} 5 & 4 & -1 \\ -3 & 1 & 11 \\ 20 & -8 & -25 \end{bmatrix}_{3 \times 3}$$

2. Producto escalar: se llama producto escalar al resultado de multiplicar 2 vectores (fila x columna), este resultado es un solo elemento y se obtiene multiplicando elemento por elemento y sumando los resultados. Las filas y columnas deben tener la misma cantidad de elementos.

**Ejemplo #1:**  $[5 \quad 9 \quad -2] \cdot \begin{bmatrix} 11 \\ 10 \\ -1 \end{bmatrix} = [(5)(9) + (9)(10) + (-2)(-1)] = [45 + 90 + 2] = [137]$

**Ejemplo #2:**

El producto de una fila por una columna da como resultado un solo elemento.



$$\begin{bmatrix} 3 \\ -4 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot [-8 \quad -3 \quad 0 \quad 1] = [(3)(-8) + (-4)(-3) + (-1)(0) + (0)(1)]$$

$$= [-24 + 12 + 0 + 0]$$

$$= [-12]$$

**Multiplicación de matrices:** se debe verificar si las matrices son conformables para la multiplicación, es decir, si queremos calcular  $AB$ , el número de columnas de  $A$  debe ser igual al número de filas de  $B$ . Luego cada elemento de las filas de la matriz  $A$  se deben multiplicar por su correspondiente en las columnas de la matriz  $B$ , para luego sumarse y obtener cada elemento de la matriz producto  $AB$ , es decir el producto de cada fila por cada columna genera un solo elemento de la matriz resultante (producto escalar). El orden de la matriz  $AB$  será el producto del número de las filas de la matriz  $A$  por el número de las columnas de la matriz  $B$ .

**Ejemplo#1:**

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & -3 & -2 \\ 0 & -4 & 5 & 2 \end{bmatrix}_{3 \times 4} \quad B = \begin{bmatrix} -2 & 6 \\ 0 & 1 \\ -1 & 3 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}_{4 \times 2}$$

$A_{3 \times 4} \cdot B_{4 \times 2}$  son conformables para la multiplicación ya que si cumplen la condición.



$$AB = \begin{bmatrix} (1)(-2) + (-1)(0) + (0)(-1) + (3)(2) & (1)(6) + (-1)(1) + (0)(3) + (3)(-3) \\ (2)(-2) + (0)(0) + (-3)(-1) + (-2)(2) & (2)(6) + (0)(1) + (-3)(3) + (-2)(-3) \\ (0)(-2) + (-4)(0) + (5)(-1) + (2)(2) & (0)(6) + (-4)(1) + (5)(3) + (2)(-3) \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} -2 + 0 + 0 + 6 & 6 + (-1) + 0 + (-9) \\ -4 + 0 + 3 + (-4) & 12 + 0 + (-9) + 6 \\ 0 + 0 + (-5) + 4 & 0 + (-4) + 15 + (-6) \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} -2 + 6 & 6 - 9 \\ -8 + 3 & 18 - 9 \\ -5 + 4 & 15 - 6 \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 4 & -4 \\ -5 & 9 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}_{3 \times 2}$$

**Ejemplo#2:**

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & -2 \end{bmatrix}_{2 \times 3} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}_{3 \times 2}$$

Como el orden de  $A$  es  $2 \times 3$  y el orden de  $B$  es  $3 \times 2$ , entonces sabemos que el producto de ellas,  $AB$  será una matriz de orden  $2 \times 2$ .

Podemos decir que el resultado de  $AB = C$ , con  $C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix}$

Calculamos los valores de las entradas de  $C$ .

$$c_{11} = a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31} = 0 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 2 \cdot 0 = 1$$

$$c_{12} = a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + a_{13}b_{32} = 0 \cdot (-2) + 1 \cdot 0 + 2 \cdot (-1) = -2$$

$$c_{21} = a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + a_{23}b_{31} = (-1) \cdot 1 + 2 \cdot 1 + (-2) \cdot 1 = 1$$

$$c_{22} = a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + a_{23}b_{32} = (-1) \cdot (-2) + 2 \cdot 0 + (-2) \cdot (-1) = 4$$

Conociendo los valores de los elementos de  $C$ , entonces escribimos el resultado de la multiplicación.  $C = A \cdot B = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$





A la matriz siguiente

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & | & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & | & b_2 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & | & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & | & b_m \end{bmatrix}$$

Se le llama matriz aumentada.

**Ejemplo #1:** Considere el siguiente sistema de ecuaciones lineales,

$$\begin{cases} -2x_1 + 3x_2 - x_3 = 1 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 4 \\ -2x_1 - x_2 + x_3 = -3 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} -2 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -2 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ -3 \end{bmatrix}$$

Forma Matricial

$$\begin{bmatrix} -2 & 3 & -1 & | & 1 \\ 1 & 2 & -1 & | & 4 \\ -2 & -1 & 1 & | & -3 \end{bmatrix}$$

Matriz aumentada

**Ejemplo#2:** Considere el siguiente sistema de ecuaciones lineales,

$$\begin{cases} x + 2y + z = 0 \\ y - 3z = 0 \\ -x + y - z = 0 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Forma Matricial

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & | & 0 \\ 0 & 1 & -3 & | & 0 \\ -1 & 1 & -1 & | & 0 \end{bmatrix}$$

Matriz aumentada

### Práctica Formativa (Representación matricial de sistemas de ecuaciones)

☆ Exprese en la forma matricial y matriz aumentada.

$$\star \begin{cases} 17x_1 - 21x_2 = 3 \\ 53x_1 + 12x_3 = 7 \\ x_1 + 9x_2 - x_3 = 2 \end{cases}$$

$$\star \begin{cases} 8x + 11y - 5z = 0 \\ 21x - 35y + 6z = 3 \\ 19x - 12y + 4z = 6 \\ 15x + y - z = 9 \end{cases}$$

$$\star \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 5 \\ 3x_1 + 2x_2 - 6x_3 = -4 \\ 5x_1 + 6x_2 + x_3 = 10 \end{cases}$$

☆ Exprese cada ecuación matricial como un sistema de ecuaciones lineales.

$$\hookrightarrow \begin{bmatrix} 4 & -2 & 8 \\ 3 & 7 & 12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\hookrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\hookrightarrow \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 5 & 0 & 4 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 8 \\ 3 \end{bmatrix}$$

☆ Encuentre el sistema de ecuaciones lineales correspondientes a cada una de las matrices aumentadas, usted determina las variables.

$$\begin{bmatrix} 3 & -4 & 1 & | & 7 \\ 2 & 0 & 3 & | & -5 \\ 1 & -1 & 6 & | & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & | & -1 \\ 2 & 1 & -4 & | & 9 \\ 1 & -1 & 2 & | & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 6 & 2 & 5 & | & 73 \\ 7 & -3 & 1 & | & -1 \\ 4 & 8 & 9 & | & -9 \end{bmatrix}$$

## Actividad Sumativa #1

### (Matrices)

Nombre: \_\_\_\_\_

Grupo: \_\_\_\_\_

Valor: \_\_\_/75pts

Resuelva con orden cada una de las partes aplicando la teoría y los ejemplos presentados en el tema.

**I.** Identifique las siguientes matrices por su nombre. (5 puntos)

$$1-\begin{bmatrix} 1 & 7 & 2 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$

$$2-\begin{bmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$3-\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

$$4-\begin{bmatrix} -2 \\ 5 \\ 6 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$5-\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ \frac{2}{5} & -1 & 0 \\ -2 & 5 & -7 \end{bmatrix}$$

\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

**II.** Determine el orden de cada una de las siguientes matrices. (7 puntos)

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 7 & 0 \\ 4 & 5 & -1 & 8 \end{bmatrix} \text{ ___} \times \text{ ___}$$

$$B = \begin{bmatrix} -3 & 5 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \text{ ___} \times \text{ ___}$$

$$C = \begin{bmatrix} 6 & 7 & 9 \\ 2 & 8 & 4 \end{bmatrix} \text{ ___} \times \text{ ___}$$

$$G = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & -3 & -2 \\ 0 & -4 & 5 & 2 \end{bmatrix} \text{ ___} \times \text{ ___}$$

$$H = \begin{bmatrix} -6 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix} \text{ ___} \times \text{ ___}$$

$$I = \begin{bmatrix} 0 & -6 \\ -2 & 3 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} \text{ ___} \times \text{ ___}$$

$$J = [1 \quad 2 \quad -3] \text{ ___} \times \text{ ___}$$

**III.** En la matriz dada, determine el orden de la matriz, identifique los elementos que se piden y los elementos que forman la diagonal principal. 16pts

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -1 & -3 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & -6 & -2 & 3 \\ 4 & -1 & 7 & 2 \end{bmatrix}$$

$$a_{44} = \text{_____}$$

$$a_{45} = \text{_____}$$

$$a_{23} = \text{_____}$$

$$a_{32} = \text{_____}$$

$$a_{14} = \text{_____}$$

$$a_{51} = \text{_____}$$

$$a_{43} = \text{_____}$$

$$a_{34} = \text{_____}$$

$$a_{12} = \text{_____}$$

$$a_{33} = \text{_____}$$

Orden: \_\_\_ x \_\_\_

Elementos de la diagonal principal: (\_\_\_\_\_, \_\_\_\_\_, \_\_\_\_\_, \_\_\_\_\_)

**IV.** Dadas las siguientes matrices, encuentre sus traspuestas e indique el orden de cada matriz y su traspuesta. (20 puntos)

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 & 3 \\ 3 & 1 & 4 & 6 \\ -5 & 7 & 2 & 1 \end{bmatrix} \_\_\times\_\_\quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 2 & 2 & -1 \end{bmatrix} \_\_\times\_\_\quad C = \begin{bmatrix} 5 & -1 & 0 & 4 \\ -1 & 2 & -6 & -1 \\ 0 & -6 & -2 & 7 \\ 4 & -1 & 7 & 2 \end{bmatrix} \_\_\times\_\_\quad$$

$$D = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 3 \\ 0 & 5 & -2 \end{bmatrix} \_\_\times\_\_\quad H = [ 2 \ -1 \ 3 ] \_\_\times\_\_\quad$$

**V.** Determine cuáles de las siguientes matrices son iguales, utilice la notación empleada en la definición. (6 puntos)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 0 & -2 & 4 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \\ 4 & 7 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 5 & 8 \\ 6 & 7 \end{bmatrix}$$

$$E = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix} \quad F = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \\ 4 & 7 \end{bmatrix} \quad G = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 0 & -2 & 4 \end{bmatrix} \quad H = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -2 \\ 7 & 4 \end{bmatrix}$$

**VI.** Determine cuáles de las siguientes matrices son simétricas. Realice el procedimiento para verificar si son simétrica. (16 puntos)

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 6 & 8 \\ 6 & 0 & 4 \\ 8 & 4 & 9 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ 5 & -2 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 4 \\ 2 & 5 & 1 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$$

**Actividad Apreciación #1**  
**(Operaciones con matrices)**

Nombre: \_\_\_\_\_

Grupo: \_\_\_\_\_

Valor: \_\_\_/105pts

Sea ordenado, debe incluir el procedimiento completo antes de presentar la respuesta.

Resuelva las siguientes operaciones con matrices.

1. 
$$\begin{bmatrix} 4 & -3 & -9 & 5 \\ 3 & 1 & 10 & 3 \\ -2 & -8 & -18 & -8 \\ 0 & 5 & 7 & 9 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -8 & 9 & -5 & -1 \\ 5 & 12 & 7 & 3 \\ -9 & 8 & 13 & 5 \\ -9 & 7 & 7 & 3 \end{bmatrix} \quad 32\text{pts}$$

2. 
$$\begin{bmatrix} 3 & 8 & 9 \\ 4 & 10 & -6 \\ 2 & 12 & -9 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 8 & 7 & 4 \\ -12 & 14 & 15 \\ -9 & -20 & 24 \end{bmatrix} \quad 18\text{pts}$$

Determine el valor de  $x$  y de  $y$  en cada igualdad.

1. 
$$\begin{bmatrix} x & 5 \\ -2 & -2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 3 & y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & 3 \\ -5 & 3 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} x = \underline{\hspace{2cm}} \\ y = \underline{\hspace{2cm}} \end{array} \quad 8\text{pts}$$

2. 
$$\begin{bmatrix} y & 1 \\ 5 & 2 \\ -3 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ x & 1 \\ 4 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 8 & 3 \\ 11 & 12 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} x = \underline{\hspace{2cm}} \\ y = \underline{\hspace{2cm}} \end{array} \quad 8\text{pts}$$

Dadas las siguientes matrices, calcule  $A + C - B$

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 5 & 2 \\ 4 & 1 & 8 \\ 6 & -1 & 2 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 4 \\ 4 & 1 & 3 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 3 \\ 4 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \quad 36\text{pts}$$

**Actividad Sumativa #2**  
**(Operaciones con matrices)**

**Nombre:** \_\_\_\_\_

**Grupo:** \_\_\_\_\_

**Valor:** \_\_\_/70pts

Sea ordenado, debe incluir el procedimiento completo antes de presentar la respuesta.

Resuelva las siguientes operaciones con matrices.

1.  $\frac{2}{3} \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 5 \\ -6 & 1 \end{bmatrix}$  10pts

2.  $-3 \begin{bmatrix} -8 & 9 & -5 & -1 \\ 5 & 12 & 7 & 3 \\ -9 & 8 & 13 & 5 \\ -9 & 7 & 7 & 3 \end{bmatrix}$  17pts

3.  $\begin{bmatrix} 13 & 8 \\ 4 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & -4 & 2 & 31 \\ 1 & 9 & -1 & 18 \end{bmatrix}$  20pts

4.  $\begin{bmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 6 & -3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 5 \\ 1 & 0 & 0 \\ 4 & 9 & 2 \end{bmatrix}$  20pts

**Actividad Sumativa #3**  
**(Representación matricial de sistema de ecuaciones lineales)**

Nombre: \_\_\_\_\_

Grupo: \_\_\_\_\_

Valor: \_\_\_/75pts

Sea ordenado, debe incluir el procedimiento completo antes de presentar la respuesta.  
Resuelva los siguientes casos

- Exprese el sistema de ecuaciones en su forma matricial y la matriz aumentada. 16pts

$$\star \begin{cases} 2w + 8x + 6y - 9z = 20 \\ 4w + 5x - 2y - z = -2 \\ -6w + 4x + 10y + 7z = 24 \end{cases} \quad \star \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 9 \\ 2x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 1 \\ 3x_1 + 6x_2 - 5x_3 = 0 \end{cases}$$

- Exprese como un sistema de ecuaciones lineales. 30pts

$$\star \begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 & 0 & -3 \\ -1 & 0 & -6 & 4 & 8 \\ 5 & 1 & 0 & 4 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 8 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \star \begin{bmatrix} 11 & 21 \\ 13 & 15 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 8 \end{bmatrix} \quad \star \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}$$

- Encuentre el sistema de ecuaciones lineales correspondiente a la matriz aumentada. 24pts

$$\begin{bmatrix} -5 & 3 & 7 & 9 & | & 15 \\ 2 & 4 & 3 & 18 & | & 7 \\ 8 & 5 & 12 & 6 & | & 21 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 4 & 2 & 9 & | & 144 \\ 2 & 8 & 7 & | & 204 \\ 5 & 6 & 3 & | & 168 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 6 & 2 & 5 & | & 73 \\ 7 & -3 & 1 & | & -1 \\ 4 & 8 & 9 & | & -9 \end{bmatrix}$$

## Actividad Apreciación #2

### (Matrices)

Nombre: \_\_\_\_\_

Grupo: \_\_\_\_\_

Valor:      / 40pts

**I- Parte. Verdadero y Falso.** Escriba la palabra **Verdadero** para el enunciado cierto y la palabra **Falso** para aquellos que no sean ciertos. 7 puntos

- 1) Una matriz es un arreglo rectangular de números .....\_\_\_\_\_.
- 2) Las matrices se presentaron por primera vez en 1858.....\_\_\_\_\_.
- 3) La única aplicación que tienen las matrices es en el desarrollo matemático .....\_\_\_\_\_.
- 4) A los números reales que conforman las matrices se les llama elementos.....\_\_\_\_\_.
- 5) El conjunto horizontal de elementos recibe el nombre de renglón.....\_\_\_\_\_.
- 6) Al arreglo vertical de elementos se le llama fila.....\_\_\_\_\_.
- 7) El orden de una matriz con **m** renglones y **n** columnas es **n x m**.....\_\_\_\_\_.

**II- Parte. Pareo.** Relacione el enunciado de la columna de la izquierda con la definición en la columna de la derecha. 16 puntos

- |                               |       |  |
|-------------------------------|-------|--|
| 1) Matriz cuadrada            | _____ | Todos los elementos sobre la diagonal principal son ceros            |
| 2) Matriz renglón             | _____ | Aquella cuya traspuesta es exactamente igual a la original           |
| 3) Matriz identidad           | _____ | Todos los elementos bajo la diagonal principal son ceros             |
| 4) Matriz diagonal            | _____ | Se obtiene intercambiando de forma ordenada las filas por columnas.  |
| 5) Matriz simétrica           | _____ | Los elementos de la diagonal principal son iguales a 1               |
| 6) Matriz triangular superior | _____ | Aquella donde el número de renglones es igual al número de columnas. |
| 7) Matriz triangular inferior | _____ | Está formada por una sola fila                                       |
| 8) Matriz traspuesta          | _____ | Los elementos fuera de la diagonal principal son 0.                  |

**III- Aplicación.** Encuentre las respuestas solicitadas, en el siguiente planteamiento.

En la tabla de abajo se muestra la cantidad de citas que se dan en una clínica, según la especialidad y el día de semana: (14 puntos)

- 1) ¿Cuál matriz representara la cantidad de citas por especialidad y día que se dan en la clínica durante un mes de 4 semanas?
- 2) ¿Cuántas citas de pediatría se dan en 4 semanas?
- 3) ¿Cuántas citas de ortopedia se darán para miércoles en el mes?
- 4) ¿Cuántas citas de optometría se dan por semana?
- 5) ¿Cuántas citas de odontología se dan para jueves y viernes al mes?

Especialidad	L	M	M	J	V
Odontología	0	6	6	12	12
Pediatría	9	0	9	9	9
Ortopedia	5	10	0	5	10
Ginecología	8	8	8	0	6
Optometría	14	14	7	7	0