Ministerio de Educación

Dirección Regional de Panamá Este

I.P. T. México- Panamá

Departamento de Matemática

Material de Aprendizaje a Distancia

10mo Grado

Bachiller en Agropecuaria

ÁREA TRIGONOMETRÍA

10° A, B, C D.

Profesora Diocelinda Sanjur

Tel. 61594581

diocelindasanjur@gmail.com

Tercer Trimestre

2022

Fechas de entrega:

- **Viernes 25 de noviembre**

  Actividad Sumativa#1   Actividad de apreciación #1

- **Viernes 9 diciembre**

  Actividad sumativa #2   Actividad sumativa #3

- **Viernes 16 de diciembre**

  Actividad de apreciación #2

Indicaciones Generales:

- Sea puntual, claro y ordenado en la entrega y resolución de sus actividades.
- Entregue sus actividades en hoja, con el procedimiento completo, desarrollado a mano, con su información nombre completo y grupo.
- Todas las actividades tienen puntos por puntualidad y orden y aseo.

Tema #1. ORIGEN DE LA TRIGONOMETRÍA

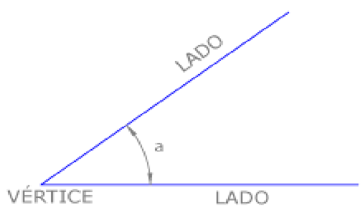
Los babilonios y los egipcios (hace más de 3000 años) fueron los primeros en utilizar los ángulos de un triángulo y las razones trigonométricas para efectuar medidas en agricultura y para la construcción de pirámides.

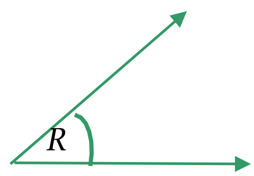
La palabra trigonometría indica el objeto original de esta rama de la matemática. Las tres palabras griegas de las cuales proviene significan *"tres – ángulos – medidas"* e indican que, cuando adoptó el nombre, el tema que principalmente trataba estaba relacionado con las medidas de un triángulo.

La trigonometría se basa en ciertas relaciones, llamadas *funciones trigonométricas*, estas relaciones son importantes por dos razones: son la base de una teoría que se usa en otras ramas de la matemática, así como en física e ingeniería; y porque se utilizan en la solución de triángulos.

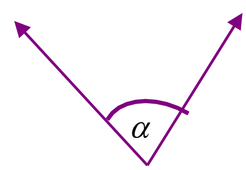
Conceptos Básicos

a) **Ángulo:** un ángulo está formado por dos rayos que tienen un punto común; llamado vértice. Cantidad de rotación que genera el movimiento de un rayo desde una posición a otra.





$\angle R$



$\angle \alpha$

** El ángulo se puede denotar por tres letras mayúsculas, una sola letra mayúscula o una letra griega minúscula **

a.1 **Rayo:** segmento de recta que se extiende en una dirección desde un punto sobre la línea.

a.2 **Lados del ángulo:** formados por los segmentos de rayo.

a.2.1 ***Lado inicial****:* donde inicia el ángulo.

a.2.2 ***Lado terminal****:* donde finaliza el ángulo.

a.3 **Ángulo positivo:** se genera por la rotación en sentido contrario a las manecillas del reloj. (fig. 1.)

a.4 **Ángulo negativo**: generado por la rotación en sentido de las manecillas del reloj. (fig. 2)

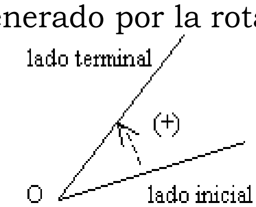


fig.1

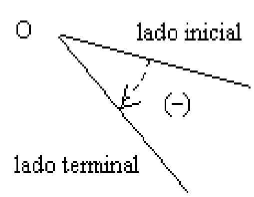


fig.2

b) **Sistemas de Coordenadas Rectangulares:** un sistema de coordenadas en un plano consiste de dos escalas numéricas llamadas ejes, cuyo punto de intersección es el origen del sistema. (fig. 3.)

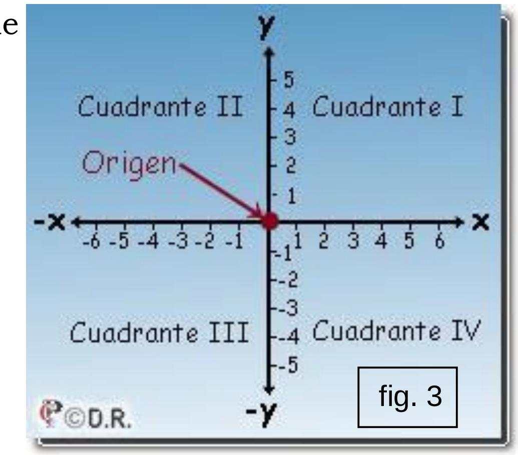


fig. 3

b.1 **Eje de las abscisas:** es el eje horizontal llamado tambiéneje de las **x**. desde el origen hacia la *derecha* los valores son *positivos* y hacia la *izquierda* son *negativos*.

b.2 **Eje de las ordenadas:** es el eje vertical, llamado también eje de las **y**. desde el origen hacia *arriba* los valores son *positivos* y hacia *abajo negativos*.

b.3 **Cuadrantes:** cada uno de los segmentos en que queda dividido el plano por el eje de coordenadas. Se nombran en sentido contrario a las manecillas del reloj: Primer, Segundo, Tercer y Cuarto Cuadrante, respectivamente. (fig. 3)

c) **Triángulo Rectángulo:** un triángulo se llama rectángulo si uno de sus ángulos es recto es decir un ángulo que mide 90° (fig. 4).

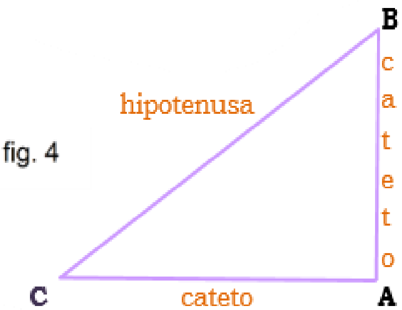
c.1 **Hipotenusa:** es el lado opuesto al ángulo recto. Es el lado mayor en todo triángulo rectángulo. (fig. 4)

c.2 **Catetos:** son los lados perpendiculares que forman el ángulo recto del triángulo, son los menores. (fig. 4)

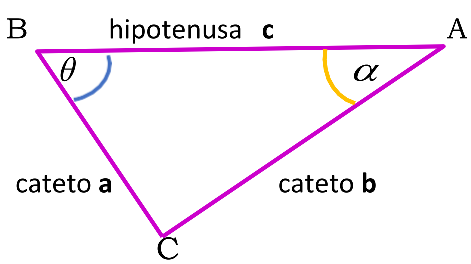
c.2.1 **Lado adyacente***:* es el lado contiguo al ángulo, en la fig. 4 para $\angle B$ es $\overline{BA}$; y para $\angle C$ es $\overline{CA}$.

c.2.2 **Lado opuesto:** es el que está enfrente (opuesto) al ángulo, en la fig. 4 para $\angle B$ es $\overline{CA}$; y para $\angle C$ es $\overline{BA}$.

fig. 4



d) **Funciones Trigonométricas:** son valores que varían de acuerdo con el tamaño de un ángulo. Establecen relaciones entre los ángulos internos y los lados en un triángulo rectángulo. Fig.5



$\overline{BC} \perp \overline{AC}$

$a \perp b$

$\angle BCA = 90°$

$\overline{BA} = c = hipotenusa$

$\overline{CA} = b \wedge \overline{CB} = a = catetos$

d.1 **Seno del ángulo:** longitud del cateto opuesto al ángulo entre la longitud de la hipotenusa del triángulo. Se abrevia ***sen***, en la fig. 5

$$sen\theta = \frac{\overline{AC}}{\overline{BA}} = \frac{b}{c}, sen\alpha = \frac{\overline{BC}}{\overline{BA}} = \frac{a}{c}$$

d.2 **Coseno del ángulo:** es el cociente del cateto adyacente del ángulo y la hipotenusa del triángulo. Se escribe ***cos***, para la fig. 5

$$cos\theta = \frac{\overline{BC}}{\overline{BA}} = \frac{a}{c}, cos\alpha = \frac{\overline{AC}}{\overline{BA}} = \frac{b}{c}$$

d.3 **Tangente del ángulo:** se obtiene de dividir el lado opuesto entre el lado adyacente del ángulo. Se denota ***tan***, en la fig.5

$$tan\theta = \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} = \frac{b}{a}, tan\alpha = \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}} = \frac{a}{b}$$

d.4 **Cotangente del ángulo:** resulta del cociente entre el lado adyacente y el lado opuesto del ángulo. Se escribe ***cot***, para la fig. 5 tenemos:

$$cot\theta = \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}} = \frac{a}{b}, cot\alpha = \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} = \frac{b}{a}$$

d.5 **Secante del ángulo:** dividimos la hipotenusa del triángulo, entre el cateto adyacente del ángulo. Lo abreviamos ***sec***, en fig. 5:

$$sec\theta = \frac{\overline{BA}}{\overline{BC}} = \frac{c}{a}, sec\alpha = \frac{\overline{BA}}{\overline{AC}} = \frac{c}{b}$$

d. 6 **Cosecante del ángulo:** se divide la hipotenusa del triángulo entre el lado opuesto del ángulo. Se escribe ***csc***, para la fig. 5 resulta:

$$csc\theta = \frac{\overline{BA}}{\overline{AC}} = \frac{c}{b}, csc\alpha = \frac{\overline{BA}}{\overline{BC}} = \frac{c}{a}$$

Actividad Formativa #1

(Conceptos Básicos Trigonometría – Razones Trigonométricas)

I – Dibuje los siguientes ángulos en su posición normal:

1) 65°

2) 45°

3) -120°

4) 30°

5) -50°

6) 210°

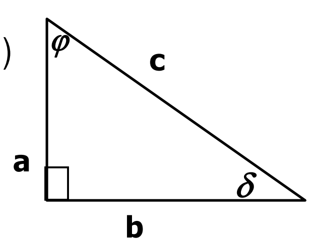
II – Localice los siguientes puntos en un solo eje de coordenadas rectangulares:

A (2,3)　　B (-3,1)　　C (4,-3)　　D (-5,-1)　　E (4,6) F

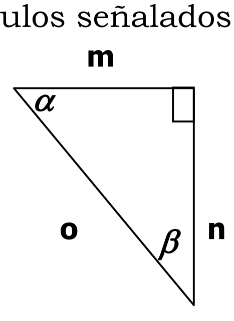
(3,- 4)　　G (-4,-2)　　H (-2,-6)　　I (0, 2)　　J (-1, 0)

III – Determine para cada uno de los siguientes triángulos rectángulos, las seis funciones trigonométricas de los ángulos señalados:

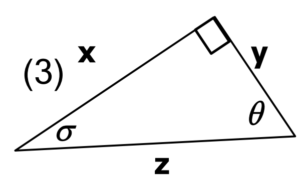
(1)



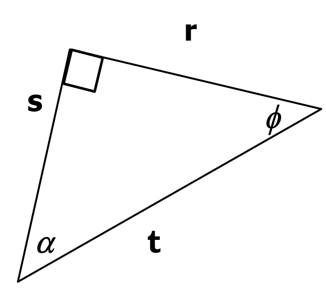
(2)



(3)



(4)



Actividad Sumátiva #1
(Conceptos Básicos Trigonometría – Razones Trigonométricas)

Nombre: ___________________ Grupo: 10°___ Evaluación:____+____orden y aseo/65=______

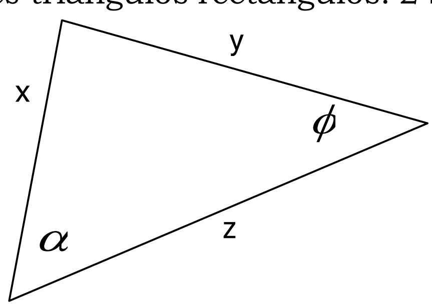
I. Parte. *Pareo.* Relacione los términos de la Columna A con las definiciones de la Columna B. 10pts

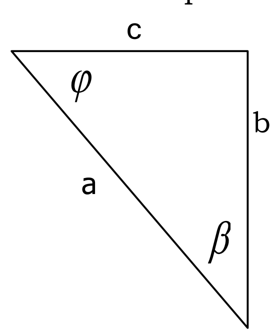
	Columna A		Columna B
___	Hipotenusa	AB	forma el ángulo recto en el triángulo rectángulo
___	Seno	EF	lado opuesto entre lado adyacente
___	Coseno	ST	gira en contrasentido del reloj
___	Cateto	MN	lado adyacente entre lado opuesto
___	Tangente	QR	hipotenusa entre el lado opuesto
___	Cotangente	GH	lado más largo en el triángulo rectángulo
___	Ángulo positivo	IJ	hipotenusa entre el lado adyacente
___	Secante	CD	lado opuesto entre hipotenusa
___	Cosecante	KL	gira en el sentido del reloj
___	Ángulo negativo	OP	lado adyacente entre hipotenusa

II. Parte. Dibuje. Construya en su posición normal, utilizando regla y transportador los ángulos señalados. 9pts.

a. 60°
b. - 25°
c. - 275°

III. Parte. Defina. Determine las funciones trigonométricas para los ángulos agudos de los siguientes triángulos rectángulos. 24pts





IV. Parte. Plano Cartesiano. Localice en un eje de coordenadas rectangulares, los siguientes puntos. 16pts (2 puntos representación de cada punto) + 3pts (ejes y origen)

A (3, 1) E (-1, -3)

B (-5, -7) F (0, -2)

C (8, 0) G (4, -5)

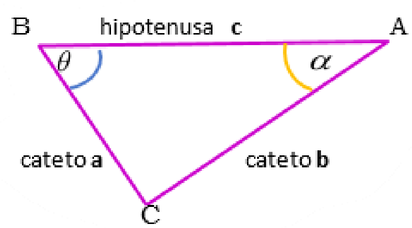
D (2, 6) H (-2, 3)

Tema#2. SOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS

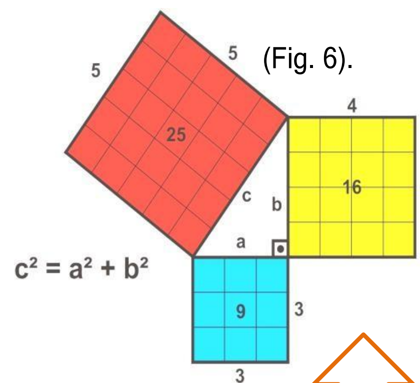
Para solucionar situaciones que impliquen triángulos rectángulos, basta con conocer las definiciones de las funciones trigonométricas y el teorema de Pitágoras. Es una de las aplicaciones más comunes de la trigonometría, que se logra realizando operaciones en base a los elementos conocidos de dichos triángulos y las funciones trigonométricas, también se puede aplicar el teorema de Pitágoras para calcular el valor de los lados faltantes. Todo triángulo consta de seis elementos, tres lados y tres ángulos. En un triángulo rectángulo por definición el valor de uno de sus ángulos es fijo 90°, por lo tanto, quedan cinco elementos que pueden variar (dos ángulos y tres lados), el cálculo de uno de los elementos desconocidos del triángulo se conoce como resolución del triángulo rectángulo.

a) **Teorema de Pitágoras**: establece una relación geométrica para los triángulos rectángulos, señalando que: ***"En todo triángulo rectángulo, el área del cuadrado construido sobre su hipotenusa es igual a la suma del área de los cuadrados construidos sobre sus catetos".***

Fig.5



(Fig. 6).



$9u^2 + 16u^2 = 25u^2$

$25u^2 = 25u^2$

Si tenemos el Δ ABC, (fig. 5), rectángulo se cumple:

$$c^2 = a^2 + b^2 \quad \Rightarrow c = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$a^2 = c^2 - b^2 \quad \Rightarrow a = \sqrt{c^2 - b^2}$$

$$b^2 = c^2 - a^2 \quad \Rightarrow b = \sqrt{c^2 - a^2}$$

***Aplicando Pitágoras**:* es necesario conocer un cateto y la hipotenusa; o en su defecto los dos catetos. *Ejemplos*:

(1) Si en el Δ ABC (rectángulo), las medidas de sus lados son: a = 6, b = 8, ¿Cuál es el valor de la hipotenusa?

Sol.: como Δ ABC es rectángulo se cumple que:

$$c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow c = \sqrt{a^2 + b^2}$$

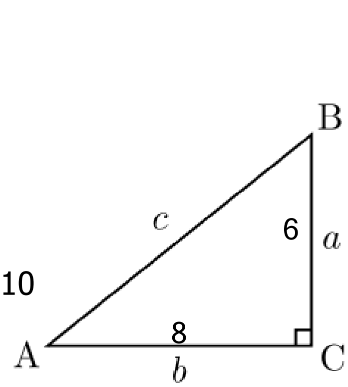
$$c = \sqrt{(6)^2 + (8)^2}$$

$$c = \sqrt{36 + 64}$$

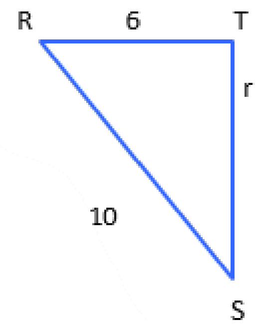
$$c = \sqrt{100}$$

$$c = 10$$

$\therefore$ La hipotenusa, en este caso ***c*** vale 10



(2) Encuentre el valor del cateto que falta en el Δ RST, si el mismo es rectángulo y posee los valores mostrados.



Sol.: como Δ RST es rectángulo cumple:

$10^2 = r^2 + (6)^2$

$100 = r^2 + 36$

$r^2 = 100 - 36$

$r^2 = 64$

$r = \sqrt{64}$

$r = 8$ $\therefore$ El cateto que falta es r = 8

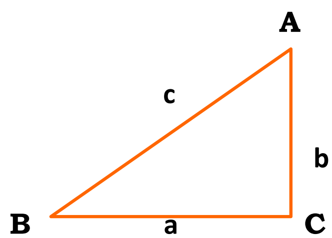
Aplicando funciones trigonométricas: se aplican cuando lo que se desea es resolver todos los elementos del triángulo. En estos casos para solucionar los triángulos rectángulos es necesario conocer; un cateto y un ángulo agudo o por otro lado la hipotenusa y un ángulo agudo.

Ejemplos:

1. Encuentre los elementos faltantes del Δ ABC, considerando que el mismo es rectángulo.

Sol.: encontrar los elementos faltantes del Δ es hallar los valores de los ángulos agudos y los lados del triángulo.

Ángulos	Lados
A=_____	a= 5,9
B= 37°	b=_____
C= 90°	c =_____



$\angle A$

Como A ^ B son ángulos complementarios, resulta

$$\angle A + \angle B = 90^\circ$$
$$\angle A = 90^\circ - \angle B$$
$$\angle A = 90^\circ - 37^\circ$$
$$\angle A = 53^\circ$$

Ahora por función trigonométrica sabemos que:

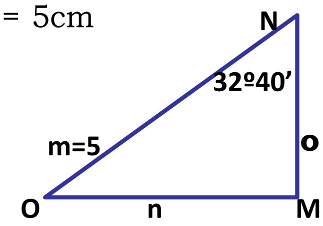
$$cosB = \frac{b}{c} \qquad\qquad tanB = \frac{b}{a}$$

$$\Rightarrow c = \frac{b}{cosB} \qquad\qquad \Rightarrow a \cdot tanB = b$$

$$c = \frac{5{,}9}{cos37^\circ} \qquad\qquad b = (5{,}9)(tan37^\circ)$$

$$c = 7{,}4 \qquad\qquad b = 4{,}4$$

2. Resolver el triángulo rectángulo MNO con $\angle N = 32°40'$ y m = 5cm



Ángulos	Lados
M = 90º	m = 5cm
N= 32º40’	n = $\mathbf{2,7cm}$
O =**57º20'**	o = $\mathbf{4,2cm}$

$\angle O = 90° - 32°40'$

$\angle O = 89°60' - 32°40'$

$\mathbf{\angle O = 57°20'}$

Calculamos el valor de los lados faltantes aplicando las funciones trigonométricas.

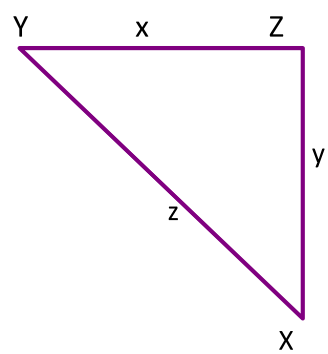
$$cosN = \frac{o}{m} \qquad senN = \frac{n}{m}$$

$$\Rightarrow o = m \cdot cos\,N \qquad \Rightarrow n = m \cdot sen\,N$$

$$o = (5cm)(cos32°40') \qquad n = (5cm)(sen32°40')$$

$$\mathbf{o = 4,2cm} \qquad \mathbf{n = 2,7cm}$$

3. Determine los elementos restantes en el triángulo rectángulo XYZ, si x = 29,0; y = 17,4 y el ángulo recto es Z.



Ángulos	Lados
X =____	x = 29,0
Y=____	y = 17,4
Z= 90º	z = ____

Primero debemos identificar cuáles son los elementos que nos están faltando, en este caso X, Y y z.

$$z = \sqrt{x^2 + y^2} \qquad tanX = \frac{x}{y} \qquad tanY = \frac{y}{x}$$

$$z = \sqrt{(29,0)^2 + (17,4)^2} \qquad X = tan^{-1}\left(\frac{x}{y}\right) \qquad Y = tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$z = \sqrt{841 + 302,76} \qquad X = tan^{-1}\left(\frac{29,0}{17,4}\right) \qquad Y = tan^{-1}\left(\frac{17,4}{29,0}\right)$$

$$z = \sqrt{1143,76} \qquad \mathbf{X = 59,0°} \qquad \mathbf{Y = 31,0°}$$

$$\mathbf{z = 33,8}$$

Actividad Formativa #2

(Solución de triángulos rectángulos)

Determine los elementos restantes en los siguientes triángulos rectángulos.

a. A = 56°20' b = 7,26 B = 90° ΔABC

b. Z = 55°29' x = 58,31 Y = 90° ΔXYZ

c. d = 2,55 f = 4,07 E = 90° ΔDEF

d. l = 4,12 k = 8,36 K = 90° ΔJKL

e. O = 66° q = 380 P = 90° ΔOPQ

Actividad de Apreciación #1

Nombre: ___________________ Grupo: 10°___ Evaluación:____+____orden y aseo/25=______

Resuelva los siguientes triángulos rectángulos aplicando los conceptos y métodos explicados. Recuerde resolver con orden y cada paso debe aparecer en la resolución.

Debe hacer el triángulo e indicar como ubico los ángulos agudos.

La resolución de cada triángulo vale 10 puntos + 5 puntos de orden y aseo

A = 35º c = 12 C= 90º ΔACB
x = 25 y = 16 Z = 90º ΔXZY

Prueba Sumativa #2

(Solución de triángulos rectángulos)

Nombre: ___________________ Grupo: 10°___ Evaluación:____+____orden y aseo/35=______

Determine los elementos faltantes en los siguientes triángulos rectángulos. Realice el esquema en cada caso, el procedimiento debe aparecer completo.
(10 puntos cada uno + 5 puntos de orden y aseo)

1) a = 12,3 A = 43º20' C = 90º

2) m= 14,2 n = 23,7 N = 90º

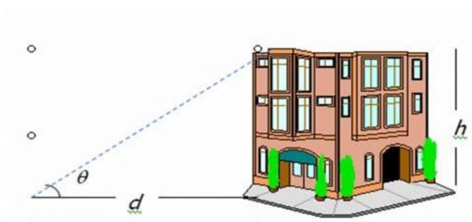
3) r = 2 T = 56,5º S = 90º

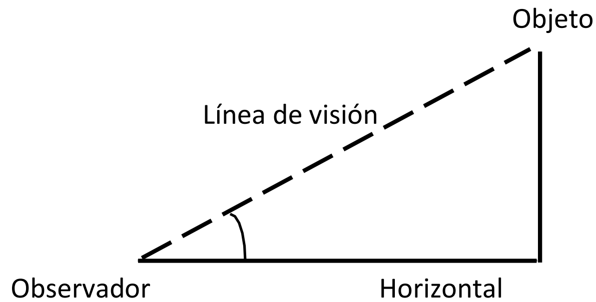
Recuerde: las letras mayúsculas indican los ángulos y las letras minúsculas los lados del triángulo.

Tema#3: ÁNGULOS DE ELEVACIÓN Y DEPRESIÓN

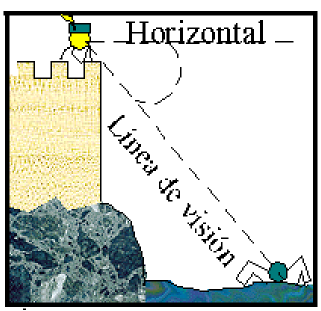
Ángulos de Elevación y de Depresión: los triángulos rectángulos se suelen usar para calcular distancia en base a otras que pueden medirse fácilmente de manera directa. Para estos efectos se utiliza la línea de visión del observador como horizontal y se considera el ángulo que se forma de acuerdo a la posición del objeto. De acuerdo a la posición del objeto tenemos:

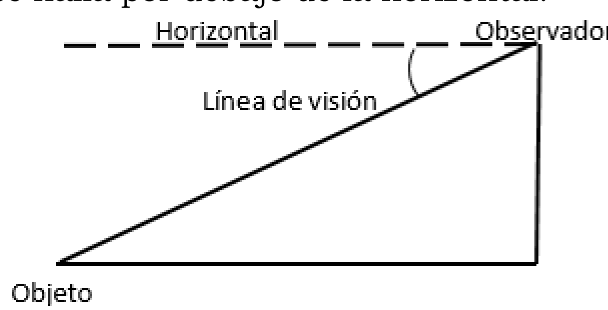
1. ***Ángulo de elevación:*** se llama ángulo de elevación al que forma la horizontal con la línea de visión, que se halla por encima de la horizontal, cuando el objeto se encuentra arriba del punto de observación.





2. ***Ángulo de depresión:*** se llama ángulo de depresión a que forma la horizontal con la línea de visión del objeto el cual se halla por debajo de la horizontal.

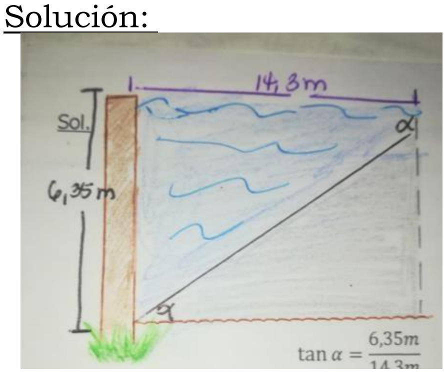




Estos dos conceptos se pueden aplicar en la solución de situaciones problemáticas, por ejemplo:

1. Un muro vertical de 6,35 metros de alto sirve como represa de control de un canal cuya pendiente es constante. Cuando el agua ha alcanzado la altura máxima del muro; el espejo del agua tiene una longitud de 14,3 metros de largo. Calcúlese el ángulo de elevación del canal.

Solución:



$$\tan\alpha = \frac{6{,}35\ m}{14{,}3\ m}$$

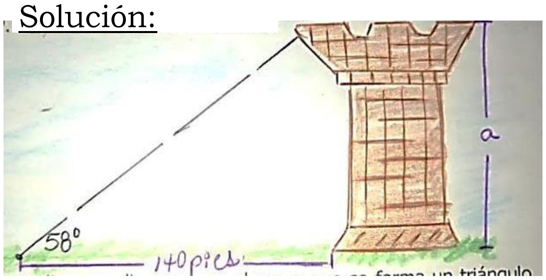
$$\alpha = \tan^{-1}\frac{6{,}35}{14{,}3}$$

$$\alpha = 23°56'$$

Resp. El ángulo de elevación del canal es de 23°56’.

2. Desde un punto a nivel del suelo y a 140 pies de la base de una torre, el ángulo de visión a la parte más alta de la torre es de 58°. Encuentre la altura de la torre.

Solución:



Luego de realizar un diagrama se observa que se forma un triángulo rectángulo. Aplicando funciones trigonométricas resulta:

$$tan58° = \frac{a}{140pies}\left(\frac{cateto\ opuesto}{cateto\ adyacente}\right)$$

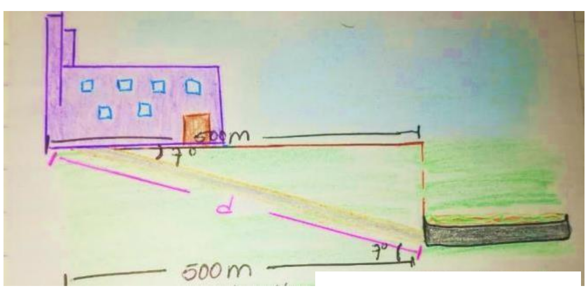
$$\Rightarrow a = tan(58°)(140pies)$$

$$a = 224{,}05pies$$

∴La altura de la torre es de 224,05 pies.

3. Una tubería de desagüe lleva los desechos desde una empacadora de productos hacia la laguna de oxidación que se encuentra a 500m de la empacadora. Determina la longitud de la tubería si necesita un ángulo de depresión de 7°.

Solución:



Tenemos un triángulo rectángulo, podemos señalar.

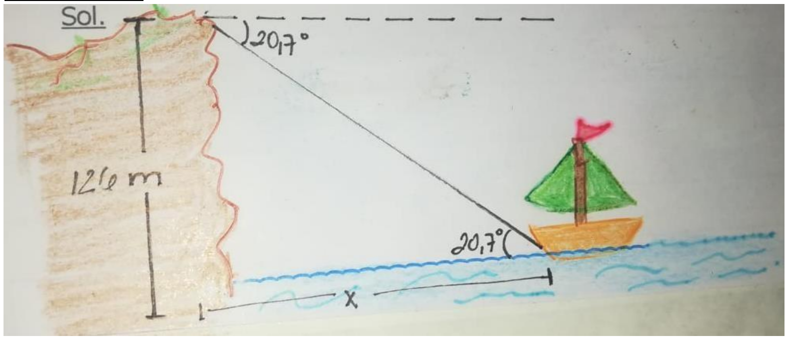
$$cos7° = \frac{500m}{d}\left(\frac{cateto\ opuesto}{hipotenusa}\right)$$

$$\Rightarrow d = \frac{500m}{cos7°} \longrightarrow despejando\ d$$

$$d = 503{,}8\ m$$

∴La longitud de la tubería del desagüe es de 503,8m.

4. Desde el borde de un acantilado de 126m de altura, el ángulo de visión hacia un velero es 20,7°.
   ¿A qué distancia del pie del acantilado está dicho bote?
   Solución:



Queda establecido un triángulo rectángulo, por tanto:

$$tan20{,}7° = \frac{126m}{x}\left(\frac{cateto\ opuesto}{cateto\ adyacente}\right)$$

$$\Rightarrow x = \frac{126m}{tan20{,}7°} \longrightarrow despejando\ x$$

$$x = 333,$$

∴Luego la distancia del bote al pie del acantilado es de 333,4m aproximadamente.

Actividad formativa#3
(Ángulos de elevación y depresión)

Encuentre la solución a las siguientes situaciones problemáticas:

1. El ángulo de observación desde un avión en vuelo, hacia la cubierta de un portaaviones es de 52º20'. Si el avión se encuentra a 200m sobre el nivel de la cubierta del portaaviones. ¿Cuál es la distancia del avión al portaviones?

2. La altura del Cerro Ancón es de 681m. si un observador se encuentra en la Avenida Balboa y observa con un ángulo de elevación de 60º10' la parte más alta de la bandera, ¿a qué distancia se encuentra el observador si la altura del asta de la bandera es de 150m desde la base?

3. Una torre de 135pies de altura situada a la orilla de un lago. Desde la punta de la torre, el ángulo de visión de un objeto en la orilla opuesta del lago es 36,3º. ¿Cuál es el ancho del lago?

4. La entrada a una mina se encuentra en un risco vertical a la cual se da acceso por medio de una escalera de mano de 12,13 m de largo y con un ángulo de elevación de 52°40' con el piso. Se desea saber que longitud de cuerda se necesita para subir y bajar canastas de la entrada verticalmente a la tierra, si se emplea un metro de soga en los nudos.

5. El puente levadizo de un castillo tiene 4 metros de largo y está sostenido por dos cadenas que están fijas por un lado al extremo del puente y por el otro lado al muro a 2,5 metros sobre el puente. Si el puente es horizontal, calcule el largo de las cadenas y el ángulo de elevación de las cadenas cuando el puente está colocado.

Actividad Sumativa#3
(Ángulos de elevación y depresión)

Nombre: ___________________ Grupo: 10°___ Evaluación:____+____orden y aseo/35=______

Resuelva los siguientes casos aplicando la teoría de ángulos de elevación y depresión, debe presentar el esquema (dibujo) de la siguiente situación a resolver y el procedimiento completo(cálculos).

1. Un pintor tiene que pintar el exterior de una ventana que está a 4,78 metros de altura sobre el suelo del jardín, al pie de la ventana hay un macizo de arbustos que impide colocar el pie de la escalera a menos de 1,93 metros de la fachada. ¿Qué largo mínimo de escalera tendrá que emplear el pinto para realizar el trabajo y cuál será el ángulo de elevación que se forma desde el pie de la escalera a la ventana? (15 puntos)

2. Un observador sabe que la altura de una montaña es de 4378 metros y que su casa tiene una altura (ambas sobre el nivel del mar) de 1637 metros. Con un teodolito determina que el ángulo de elevación de la montaña es de 22°14´. Se desea saber la distancia rectilínea de la casa de esa persona a la cúspide de la montaña. (15 puntos)

Actividad de Apreciación #2
(Cuestionario)

Indicaciones: Resuelva las siguientes preguntas con el material proporcionado en los temas anteriores.
Valor 35 puntos.
Cada respuesta: 3 puntos.
Puntualidad: 2 puntos.
Orden y aseo: 3 puntos

1. ¿Quiénes fueron los primeros en utilizar ángulos de triángulos y razones trigonométricas y en qué?
2. ¿Por qué son importantes las funciones trigonométricas?
3. ¿Qué es un ángulo?
4. ¿Qué es un sistema de coordenadas rectangulares y cuáles son sus elementos?
5. ¿Qué es un triángulo rectángulo, mencione sus elementos?
6. ¿Mencione las funciones trigonométricas y que establecen?
7. ¿Qué establece el teorema de Pitágoras?
8. ¿Qué se necesita para solucionar situaciones que impliquen triángulos rectángulos?
9. ¿Qué es un ángulo de elevación?
10. ¿Qué es un ángulo de depresión?