REPÚBLICA DE PANAMÁ
GOBIERNO NACIONAL

MINISTERIO DE EDUCACIÓN

EL MUNDO MARAVILLOSO DE LA MATEMÁTICA

10°

Talleres para Alumnos

REPÚBLICA DE PANAMÁ
GOBIERNO NACIONAL

MINISTERIO DE EDUCACIÓN

Autoridades

S. E. Maruja Gorday de Villalobos
Ministra de Educación
S. E. Zonia Gallardo de Smith
Viceministra Académica
S. E. José Pío Castillero
Viceministro Administrativo
S. E. Ricardo Sánchez
Viceministro de Infraestructura

Equipo Directivo

Dirección General

Guillermo Alegría
Director General de Educación

Victoria Tello
Subdirectora General de Educación Académica

Anayka De La Espada
Subdirectora General Técnico Administrativa

Directores Nacionales Académicos

Isis Núñez
Directora Nacional de Educación Media Académica

Carlos González
Director Nacional de Educación Media Profesional y Técnica

Agnes de Cotes
Directora Nacional de Jóvenes y Adultos

Carmen Reyes
Directora Nacional de Currículo y Tecnología Educativa

REPÚBLICA DE PANAMÁ
GOBIERNO NACIONAL

MINISTERIO DE EDUCACIÓN

DIRECCIÓN GENERAL DE EDUCACIÓN
DIRECCIÓN NACIONAL DE EDUCACIÓN MEDIA ACADÉMICA

GUÍA DE AUTOAPRENDIZAJE

Estudiante: ______________________________

Centro Educativo: ________________________

Medidas de prevención por el COVID - 19

ISIS NÚÑEZ
Directora Nacional de Educación Media Académica

Equipo Coordinador

Eduvigis Mercedes Rodríguez I.
Coordinadora General

Lenin Hernández
Apoyo Técnico Curricular 10°

Emiliano González
Apoyo Técnico Curricular 11°

Lysseth A. Pittí
Apoyo Técnico Curricular 12°

Aracelly Agudo
Diseño de Portadas

Docentes Especialistas de Matemática

Décimo Grado

- **Cristina González Guerra**
Región de Panamá Centro
Instituto Comercial Panamá
- **Cynthia Candanedo**
Región de la Comarca Ngäbe Buglé
I.P. T. Sitio Prado
- **Elsa Eugenia González Serrano**
Región de Chiriquí
- Colegio Comercial Tolé

Undécimo Grado

- **Johanna E. Castillo M.**
Región de Veraguas
Colegio José Bonifacio Alvarado
- **Juan Manuel Quirós**
Región de Panamá Oeste
Escuela Stella Sierra
- **Janeth Aparicio de Higuera**
Región de Coclé
I. P.T. Industrial de Aguadulce
- **Dalba Janet Morán Arias**
Región de Coclé
Instituto Carmen Conté Lombardo
- **Lorenzo Caballero Vigil**
Región de Veraguas
C.E.B.G. José Santos Puga

Duodécimo Grado

- **Reyna Jaramillo**
Región de Veraguas
Instituto Urracá
- **Joel Almanza**
Región de Herrera
C. E. B. G. De Parita
- **Anastasio Serrano Abrego**
Región de Bocas del Toro
C.E.B.G. Bilingüe Guabito
- **Neuza Delgado de Pinzón**
Región de Coclé
C. E. Bilingüe Federico Zúñiga Feliú
- **Jane Cedeño**
Región de Chiriquí
Instituto David
- **José A. Echeverría**
Región de Chiriquí
Benigno Tomas Argote
- **Abdul Troncoso**
Región de Chiriquí
I.P.T Diurno de David

Colaboradores y correctores

Aritmética

- Yosari Alvarado
- Arnulfo Ariel Ríos Aparicio
- Fernando Domínguez
- Rosaura Pérez Araúz

Algebra

- Yassir E. Bruce M.
- Edilberto José Adames Pineda
- Migdalia Lineth Domínguez

Geometría

- Maricela Muñoz
- Daniel Alvarado Moreno

Trigonometría y cálculo

- Nurkia Díaz de Mendieta
- Américo Rodríguez

Revisores

- **Dalys Villarreal**
Región de Coclé
I.P. T. Industrial de Aguadulce
- **Nilka O. Solís Samudio**
Región de Chiriquí
Colegio Francisco Morazán

Versión 2. Agosto, 2020

Mensaje para los estudiantes

Apreciado estudiante:

Pensando en ti, para que puedas lograr tus sueños, queremos que sigas aprendiendo. Ahora que estás en casa, aprovecha y comparte con tu familia, escribe historias con tus personajes favoritos, lee todo lo que puedas, imagina un mundo mejor, cuida a los animales, siembra un árbol; en fin, aprovecha el tiempo y trata de ser muy feliz.

¡Te extrañamos! pronto nos veremos, recuerda que es importante que sigas aprendiendo. Para lograrlo, debes desarrollar cada una de las asignaciones y actividades, que han sido elaboradas, especialmente para ti. Trata de hacerlo de forma independiente, si tienes quien te ayude, ¡fabuloso! Pero recuerda, tienes una oportunidad valiosa para que, a través de los libros, puedas conocer el mundo, aprender la magia de los números, viajar con la lectura, analizar la importancia del agua, los beneficios de los árboles, el funcionamiento de nuestro cuerpo y los cuidados que debemos darle.

Eres de gran valor para tu familia y nuestro país, por eso debes cuidar tu salud y seguir las recomendaciones para la prevención de enfermedades.

Pronto volveremos a la escuela y queremos que nos digas cuanto aprendiste, el tema más interesante que desarrollaste, la lectura que más te gustó, lo divertido que fue para ti, aprender en casa. ¡Nos veremos pronto, todo va a salir bien!

Maruja Gorday de Villalobos

Ministra de Educación

Contenido

UNIDAD 1: ALGEBRA

OBJETIVOS DE APRENDIZAJE

- Resuelve problemas cotidianos que involucren conceptos básicos y propiedades de potenciación valorando la solución de problemas del contexto.
- Resuelve problemas cotidianos que involucren conceptos básicos, propiedades y operaciones algebraicas de radicación, en la resolución de problemas con operaciones básicas y racionalización de expresiones algebraicas.
- Aplica distintos métodos como estrategia de solución para determinar las raíces de ecuaciones y problemas de situaciones reales aplicando proceso de una ecuación cuadrática.

INDICADORES DE LOGRO

- Simplifica expresiones aritméticas y algebraicas, aplicando correctamente las propiedades de las potencias.
- Determina correctamente los valores faltantes de expresiones algebraicas.
- Resuelve situaciones reales, aplicando las propiedades de las potencias, con seguridad.
- Transforma expresiones con radicales a fraccionarias y viceversa, aplicando con seguridad la propiedad.
- Resuelve operaciones con radicales de igual y distintos índices, haciendo uso de la simplificación de radicales, con dominio de las propiedades.
- Racionalice una expresión algebraica, utilizando los procesos correctos cuando es monomio o polinomio.
- Aplica correctamente, los métodos de solución de las ecuaciones cuadráticas para determinar sus raíces.
- Resuelve Aplicando el lenguaje matemático para traducir situaciones reales y resolverlas con los procesos de solución de una ecuación cuadrática, correctamente.
- Resuelve con seguridad, ecuaciones con radicales aplicando sus procesos de solución y sus propiedades.

UNIDAD 2: GEOMETRÍA

OBJETIVOS DE APRENDIZAJE

- Realiza demostraciones geométricas sencillas mediante el Teorema de Thales argumentando las hipótesis y la tesis, utilizando las nociones geométricas de congruencia, proporcionalidad y sistemas de representación espacial para interpretar, comprender, elaborar y comunicar informaciones relativas al espacio físico.
- Realiza demostraciones sencillas mediante la semejanza de triángulos utilizando criterios de semejanzas para triángulos rectángulos y no rectángulos para interpretar, comprender, elaborar hipótesis y determinar el valor desconocido.

INDICADORES DE LOGRO

- Aplica correctamente, los métodos de solución de las ecuaciones cuadráticas para determinar sus raíces.
- Resuelve Aplicando el lenguaje matemático para traducir situaciones reales y resolverlas con los procesos de solución de una ecuación cuadrática, correctamente.
- Resuelve con seguridad, ecuaciones con radicales aplicando sus procesos de solución y sus propiedades.
- Establece con seguridad, la diferencia entre los principios de proporcionalidad y los criterios de semejanza de triángulos.
- Aplica acertadamente, los criterios de semejanza de triángulos para demostrar la semejanza entre dos triángulos dados y determinar el valor de cada elemento desconocido.

UNIDAD 3: TRIGONOMETRÍA

OBJETIVOS DE APRENDIZAJE

- Aplica la trigonometría al resolver problemas de la vida cotidiana relacionada con los triángulos rectángulos y oblicuángulos.

INDICADORES DE LOGRO

- Construye un ángulo en posición normal utilizando correctamente el transportador y expresa las funciones trigonométricas.
- Determina el valor de las funciones trigonométrica conociendo dos lados del triángulo, con seguridad - Resuelve triángulos rectángulos aplicando correctamente las razones trigonométricas.
- Demuestra identidades trigonométricas utilizando los valores de las funciones de los ángulos especiales.
- Emplea herramientas tecnológicas para analizar la aplicación de las razones trigonométricas.
- Resuelve situaciones reales sobre triángulos oblicuángulos y discute con sus compañeros el proceso utilizado.

UNIDAD 4: ESTADÍSTICA

OBJETIVOS DE APRENDIZAJE

- Utiliza la estadística descriptiva, aplicando correctamente el tratamiento de la información obtenida del entorno, valorando las distintas propuestas de solución con el fin que utilice las fórmulas, organicen, represente gráficamente e interprete los resultados de las diferentes informaciones del contexto.

INDICADORES DE LOGRO

- Realiza los procesos estadísticos adecuados para organizar los datos en las Tablas Estadísticas.
- Presenta correctamente los valores numéricos en las columnas correspondientes para completar las Tablas Estadísticas.
- Establece conclusiones, a partir de los datos organizados en la Tabla, para dar respuesta a la problemática planteada.
- Interpreta correctamente situaciones del contexto, representado a través de gráficos estadísticos.
- Calcula los valores de las medidas de centralización sustituyendo los elementos en las fórmulas.
- Obtiene, a partir de sucesos o fenómenos, los datos para la correcta construcción de tablas de distribución de frecuencias para datos agrupados.
- Realiza la tabulación digital de la información recogida en las celdas correspondientes.
- Diseña las gráficas estadísticas con los valores de la frecuencia y los datos que han sido tabulados.
- Calcula las medidas de tendencia central que correspondan a la Tabla.
- Interpreta situaciones reales con gran facilidad, haciendo uso de los programas con aplicación estadística con el fin que establezca conclusiones e interpretación de datos.

COMPETENCIAS MATEMÁTICAS

- **Aprender a aprender:** Muestra capacidad permanente para obtener y aplicar nuevos conocimientos y adquirir destrezas.
  Desarrolla la habilidad para utilizar y relacionar los números, sus operaciones básicas, los símbolos y las formas de expresión y razonamiento matemático, tanto para producir e interpretar distintos tipos de información.
- **Matemáticas:** Resuelve operaciones fundamentales en el campo de los números racionales mediante la aplicación de los conceptos matemáticos en la solución de situaciones de su entorno.
- **Tratamiento de la información y competencia digital:** Participa en proyectos innovadores mediante la aplicación de estrategias diversas con miras a la solución de situaciones de su entorno.
- **Autonomía e iniciativa personal:** Manifiesta actitud perseverante hasta lograr las metas que se ha propuesto.

RECURSOS DIDÁCTICOS

- Lápiz, borrador cuaderno, regla para imprimir en anexos.
- Calculadora
- Microsoft Office-Excel

PRESENTACIÓN

El COVID-19 nos ha cambiado la vida, ahora debemos estar en casa y no en las escuelas como estamos acostumbrados. De esta manera evitamos un mayor contagio en las comunidades, en nuestras familias y amigos. Para que continúe estudiando en su casa, un grupo de docentes de matemática y los egresados de la Maestría en Didáctica de la Matemática, dictada por la Universidad Autónoma de Barcelona; Auspiciada por la SENACYT, hemos elaborado esta guía de aprendizaje con el fin de que nuestros estudiantes sean competentes y descubran la importancia de la matemática y sus aplicaciones en la naturaleza, en la vida diaria y en el mundo. El propósito fundamental es mejorar la calidad en los procesos de enseñanza.

Las temáticas presentadas corresponden al currículo priorizado de la educación media en décimo grado, del Bachiller en Ciencias, Humanidades, Informática, Agropecuaria, Servicio y Gestión Institucional, Marítima, Industriales. En los talleres que hemos seleccionado está considerada la problemática que existe en esta área y el papel fundamental de la visualización en el desarrollo de problemas matemáticos.

La relación con la naturaleza, el comercio, contexto y la relación con otras ciencias, permiten que el estudiante desarrolle la visualización explorando y observando lo que sucede con los objetos que existen en su medio, que se valore a sí mismo y aborde problemas y retos teniendo en cuenta los objetivos que persigue e integre los conocimientos tecnológicos, humanísticos y científicos que faciliten el establecimiento de relaciones entre los diferentes campos del saber humano.

A continuación, presentamos los conceptos básicos mediante una secuencia de actividades (Introducción-I, Temas-T, Autoevaluación-A); que corresponden al año lectivo 2020, **las mismas pueden ser desarrolladas en este cuadernillo o en su portafolio de actividades.**

Bienvenidos al "*Mundo Maravilloso de la Matemática".*
#aprendoencasa, ¡Juntos lo lograremos!

Docentes del Mundo Maravilloso de la Matemática.

El Mundo Maravilloso de la Matemática

1 | ÁLGEBRA

TEMA 1. LA POTENCIACIÓN

• Repaso

La potenciación era conocida ya desde la antigüedad, los babilonios utilizaban la elevación a potencia como auxiliar de la multiplicación. Los griegos por su parte tenían predilección por los cuadrados y los cubos.

La potenciación es el producto de varios factores iguales. Para abreviar la escritura, se escribe el factor que se repite y en la parte superior derecha del mismo se coloca el número de veces que se multiplica.

Si bien la palabra exponente pasó a significar cosas diferentes, el primer uso moderno registrado de exponente en matemáticas fue en un libro llamado "Integra Arithemetica", escrito en 1544 por el autor inglés y matemático Michael Stifel. Pero él simplemente estaba trabajando con una base de dos, de modo que, por ejemplo, el exponente 3 significaba la cantidad de números 2 que tendrías que multiplicar para obtener 8. Lo que se vería así: $2^3 = 8$.

• Potencia de exponente natural

Una potencia es el producto de factores iguales, es decir,

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot .... \cdot a}_{}$$

$\boldsymbol{n}$ veces $\boldsymbol{a}$ como factor

Si $\frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{b}}$ es un número racional, el producto de $\frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{b}}$ por si mismo $\boldsymbol{n}$ veces, es una potencia, es decir, una potencia es un producto de varios factores iguales:

exponente: indica las veces que se multiplica la base.

$$\left(\frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{b}}\right)^{\boldsymbol{n}} = \underbrace{\frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{b}} \cdot \frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{b}} \cdot \frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{b}} \cdots \frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{b}}}_{n-veces} = \frac{\boldsymbol{c}}{\boldsymbol{d}}$$

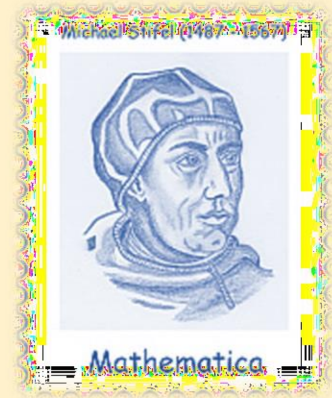
base: es el número que se multiplica.

potencia: es el resultado de la multiplicación reiterada.

Donde;

$\boldsymbol{c = a^n}$ $\boldsymbol{y}$ $\boldsymbol{d = b^n}$

SABÍAS QUE..



La palabra exponente en sí misma proviene del latín "expo", que significa "fuera de", y "ponere", que significa "lugar".

El método de Stifel se diría que es un poco retrógrado en comparación con la forma en que pensamos acerca del tema hoy.

Él diría que "el 3 es la configuración del 8".

Hoy en día, nos referimos a eso simplemente como una ecuación de 2 al cubo. Hay que recordar que él estaba trabajando exclusivamente con una base o un factor de 2 y traduciendo del latín un poco más literalmente de lo que hacemos actualmente

- ## Propiedades de las potencias

Propiedad		Ejemplo	Descripción
Potencia de exponente cero.	$a^0 = 1$	$7^0 = 1$	Toda base cuyo exponente es cero, la potencia es igual a uno.
Potencia de exponente uno.	$a^1 = a$	$15^1 = 15$	Toda base cuyo exponente es el número uno, la potencia es igual a la misma base.
Potencias de base uno.	$1^n = 1$	$1^n = 1$	Si la base es el número uno y el exponente es cualquier número natural, la potencia es uno.
Producto de bases iguales.	$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$	$3^2 \cdot 3 = 3^{2+1} = 3^3 = 27$	Al multiplicar dos o más bases iguales, los exponentes se suman.
Cociente de bases iguales.	$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$	$\frac{2^4}{2^3} = 2^{4-3} = 2^1 = 2$	Al dividir dos bases iguales, los exponentes se restan.
Multiplicación de bases diferentes con el mismo exponente.	$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$	$(2 \cdot 3)^2 = 6^2 = 36$ $(2 \cdot 3)^2 = 2^2 \cdot 3^2 = 4 \cdot 9 = 36$	Las bases se elevan al mismo exponente y se halla la potencia, también se puede multiplicar las bases y calcular la potencia.
Cociente de bases diferentes e igual exponente.	$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$	$\left(\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{2^4}{3^4} = \frac{16}{81}$	Se elevan las bases al mismo exponente y se dividen las bases, se calcula la potencia.
Potencia de exponente negativo.	$a^{-n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n = \frac{1^n}{a^n} = \frac{1}{a^n}$	$3^{-2} = \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$	La potencia será su inverso elevado a la misma potencia.
Potencia de una potencia.	$(a^m)^n = a^{mn}$	$(3^3)^2 = 3^{(3*2)} = 3^6 = 729$	Se multiplican los exponentes y se calcula la potencia.

- Signo de una potencia

La potencia de exponente par es siempre positiva.

$$\left(\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{16}{81}$$

$$\left(-\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{16}{81}$$

La potencia de exponente impar tendrá el mismo signo de la base.

$$\left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{8}{27}$$

$$\left(-\frac{2}{3}\right)^3 = -\frac{8}{27}$$

Ejemplos 1: desarrolle $\left(\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}\right)^{\mathbf{2}}$

Solución:

Al ser el exponente 2 y la base $\frac{1}{3}$ se debe multiplicar 2 veces ella misma:

$$\left(\frac{1}{3}\right)^2 = \left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{9}$$

Ejemplos 2: ¿Cuál es el resultado de $\left(-\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\right)^{\mathbf{3}}$?

Solución:

La fracción debe multiplicarse 3 veces por ella misma:

$$\left(-\frac{1}{2}\right)^3 = \left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{8}$$

Ejemplos 3: desarrolle $\left(\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{4}}\right)^{\mathbf{-3}}$

Solución:

Se aplica la propiedad correspondiente y luego se desarrolla la potencia:

$$\left(\frac{3}{4}\right)^{-3} = \frac{1}{\left(\frac{3}{4}\right)^3} = \frac{1}{\frac{(3)^3}{(4)^3}} = \frac{(4)^3}{(3)^3} = \frac{64}{27} = 2\,\frac{10}{27}$$

Ejemplos 4: realice la simplificación de $\left(\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{5}}\right)^{\mathbf{5}}\left(\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{5}}\right)^{\mathbf{-2}}\left(\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{5}}\right)^{\mathbf{-1}}$

Solución:

Se aplica la propiedad correspondiente y luego se desarrolla la potencia:

$$\left(\frac{2}{5}\right)^5\left(\frac{2}{5}\right)^{-2}\left(\frac{2}{5}\right)^{-1} = \left(\frac{2}{5}\right)^{5-2-1} = \left(\frac{2}{5}\right)^{5-3} = \left(\frac{2}{5}\right)^2 = \left(\frac{2}{5}\right)\left(\frac{2}{5}\right) = \frac{4}{25}$$

Ejemplos 5: simplifique la siguiente expresión $\dfrac{\left(\frac{3}{4}\right)^{7}\left(\frac{1}{2}\right)^{4}}{\left(\frac{3}{4}\right)^{5}\left(\frac{1}{2}\right)^{5}}$

Solución:

Se aplican las propiedades correspondientes y luego se desarrolla la potencia:

$$\frac{\left(\frac{3}{4}\right)^{7}\left(\frac{1}{2}\right)^{4}}{\left(\frac{3}{4}\right)^{5}\left(\frac{1}{2}\right)^{5}}=\frac{\left(\frac{3}{4}\right)^{7-5}}{\left(\frac{1}{2}\right)^{5-4}}=\frac{\left(\frac{3}{4}\right)^{2}}{\left(\frac{1}{2}\right)}=\frac{\frac{9}{16}}{\left(\frac{1}{2}\right)}=\left(\frac{9}{16}\right)\left(\frac{2}{1}\right)=\frac{18}{16}=\frac{9}{8}$$

Ejemplos 6: simplifique la expresión $\left[\dfrac{\left(\frac{1}{3}\right)^{3}}{\left(\frac{2}{3}\right)^{2}}\right]^{-2}$

Solución:

Se aplican las propiedades correspondientes y luego se desarrolla la potencia:

$$\left[\frac{\left(\frac{1}{3}\right)^{3}}{\left(\frac{2}{3}\right)^{2}}\right]^{-2}=\left[\frac{\frac{(1)^3}{(3)^3}}{\frac{(2)^2}{(3)^2}}\right]^{-2}=\left[\frac{(1)^3(3)^2}{(3)^3(2)^2}\right]^{-2}=\left[\frac{1}{(3)(2)^2}\right]^{-2}=\frac{(1)^{-2}}{(3)^{-2}[(2)^2]^{-2}}$$

$$=\frac{(1)^{-2}}{(3)^{-2}(2)^{-4}}=\frac{\frac{1}{(1)^2}}{\frac{1}{(3)^2}\,\frac{1}{(2)^4}}=\frac{(3)^2(2)^4}{(1)^2}=\frac{(9)(16)}{1}=144$$

Ejemplos 7: simplifique $\left(\dfrac{2^{-4}}{2^{-2}-2^{-3}}\right)^{-2}$

Solución:

Se aplican las propiedades correspondientes y luego se desarrolla la potencia:

$$\left(\frac{2^{-4}}{2^{-2}-2^{-3}}\right)^{-2}=\left(\frac{\frac{1}{2^4}}{\frac{1}{2^2}-\frac{1}{2^3}}\right)^{-2}=\left(\frac{\frac{1}{2^4}}{\frac{1}{4}-\frac{1}{8}}\right)^{-2}=\left(\frac{\frac{1}{2^4}}{\frac{1}{8}}\right)^{-2}=\left(\frac{\frac{1}{2^4}}{\frac{1}{2^3}}\right)^{-2}=\left(\frac{2^3}{2^4}\right)^{-2}$$

$$=(2^{-1})^{-2}=2^2=4$$

ACTIVIDAD N° 1

I – Resuelva las siguientes operaciones de potenciación de números racionales.

1. $\left(\frac{3}{7}\right)^{6}\left(\frac{3}{7}\right)^{5}$

6. $\left[\left(\frac{7}{11}\right)^{0}\right]^{6}$

2. $\dfrac{\left(\frac{4}{8}\right)^{5}}{\left(\frac{4}{8}\right)^{3}}$

7. $\left(\frac{1}{4}\right)^{2} \div \left(\frac{1}{2}\right)^{-5}$

3. $\left[\left(\frac{3}{4}\right)^{4}\right]^{\frac{1}{2}}$

8. $\left[\left(\frac{2}{5}\right)^{2} \div \left(\frac{2}{5}\right)^{3}\right]^{-1}$

4. $\left(-\frac{5}{6}\right)^{2} \div \left(-\frac{5}{6}\right)^{3}$

9. $\left[\left(2\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\right)^{2}\right]^{3} \cdot \left[\dfrac{\left(\frac{2}{3}\right)^{3}\left(\frac{1}{3}\right)^{4}}{\left(\frac{2}{3}\right)^{7}}\right]$

5. $\dfrac{(2)^{-1}(3)^{4}}{(2)^{2}(3)^{-2}}$

10. $\left[\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{3}{5}\right)\right]^{-1} \cdot \left(\frac{5}{2}\right)^{-2} + \left(\frac{5}{3}\right)^{-1}$

II. Observe el siguiente video **«Viaje hacia el macrocosmos»**

Link del video **https://youtu.be/aznd1NEf5Oc**

1- Realice una síntesis del video en hoja tamaño carta que lleve una secuencia en el desarrollo de esta, donde resalte ¿quiénes son los autores del video? ¿qué contenidos matemáticos se observan?, ¿qué he aprendido?, entre otras preguntas.

¡Genial! Ha culminado el Tema 1 de repaso.

TEMA 2. RADICACIÓN DE NÚMEROS RACIONALES

La raíz cuadrada de un número racional es:

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{c}{d} \quad \textit{significa que} \quad \left(\frac{c}{d}\right)^2 = \frac{a}{b}$$

Ejemplo 1: El número racional $\mathbf{\frac{9}{25}}$ tiene dos raíces cuadradas:

Se representa así: $\sqrt{\frac{9}{25}} = \pm\frac{3}{5}$

$$\begin{cases} \frac{3}{5}, \; porque \; \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{9}{25} \\ -\frac{3}{5}, \; porque \; \left(-\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{9}{25} \end{cases}$$

En general, todo número racional positivo $\frac{a}{b}$ tiene dos raíces cuadradas opuestas entre sí. Los números racionales negativos no tienen raíz cuadrada, porque cualquier número elevado al cuadrado da un resultado positivo.

Ejemplo 2: Demuestre que $\sqrt{-\frac{1}{4}}$ ***no existe***

Solución:

$Dado \; que \; \left(\frac{1}{2}\right)^2 = +\frac{1}{4}$ y $\left(-\frac{1}{2}\right)^2 = +\frac{1}{4}$, queda demostrado que no existe la raíz de un número racional negativo.

La raíz enésima de un número racional $\frac{a}{b}$ es otro número $\frac{c}{d}$ que elevado a la potencia n da como resultado $\frac{a}{b}$.

Índice

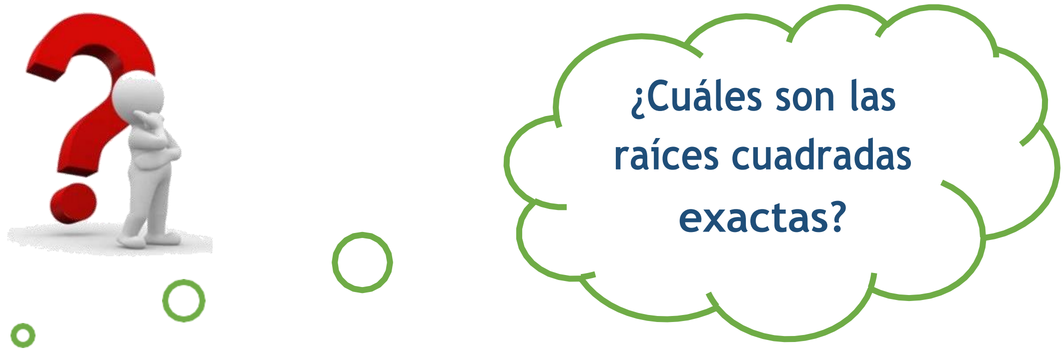
$$\boldsymbol{\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{c}{d} \Rightarrow \left(\frac{c}{d}\right)^n = \frac{a}{b}}$$

Radical

Base

Raíz

- Raíces cuadradas exactas



$\sqrt{\boldsymbol{Radicando}}$	$\sqrt{1}$	$\sqrt{4}$	$\sqrt{9}$	$\sqrt{16}$	$\sqrt{25}$	$\sqrt{36}$	$\sqrt{49}$	$\sqrt{64}$	$\sqrt{81}$	$\sqrt{100}$	$\sqrt{121}$	$\sqrt{144}$	…
Raíz	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	…

Las raíces cuadradas exactas son infinitas, recuerda que la radicación es la operación inversa de la potenciación. Por lo cual; si $\sqrt{4} = 2$ (la raíz cuadrada de 4 es 2) es por qué si elevamos la raíz al cuadrado, obtenemos el radicando,

$$2^2 = (2)\ (2) = 4$$

- Reglas de los signos

a) Cuando el índice es un número impar, la raíz tiene el mismo signo de la base.
b) Cuando el índice es un número par y la base es negativa, no tiene solución en el campo de los números racionales.
c) Cuando el índice es un número par y la base es positiva, hay dos resultados que tienen el mismo valor absoluto y distinto signo.

- Propiedades de los radicales
- $\sqrt[n]{a \cdot b \cdot c} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} \cdot \sqrt[n]{c}$
- $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$
- $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$
- $\sqrt[n]{a^r} = \sqrt[nm]{a^{rm}}$
- $\sqrt[n]{a^r} = \sqrt[n/m]{a^{r/m}}$
- $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{m}{n}}$

Ejemplos 1: aplique las propiedades de los radicales y calcula $\sqrt{\frac{1}{9}}$

Solución:

Se descompone la base en factores primos y se extrae a raíz:

$$\sqrt{\frac{1}{9}} = \sqrt{\frac{1^2}{3^2}} = \sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^2} = \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{2}{2}} = \frac{1}{3}$$

Ejemplos 2: encuentre la raíz quinta de $-\frac{32}{243}$

Solución:

Se descompone $-\frac{32}{243}$ en factores primos y se aplican las propiedades:

$$\sqrt[5]{-\frac{32}{243}} = -\sqrt[5]{\frac{32}{243}} = -\sqrt[5]{\frac{(2)^5}{(3)^5}} = -\sqrt[5]{\left(\frac{2}{3}\right)^5} = -\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{5}{5}} = -\frac{2}{3}$$

Ejemplos 3: ¿Cuál es el resultado de $\sqrt[3]{\sqrt{\frac{1}{64}}}$?

Solución:

Se descompone la base en factores primos y se aplican las propiedades:

$$\sqrt[3]{\sqrt{\frac{1}{64}}} = \sqrt[3]{\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^6}} = \sqrt[3]{\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{6}{2}}} = \sqrt[3]{\left(\frac{1}{2}\right)^3} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{3}{3}} = \frac{1}{2}$$

Ejemplos 4: ¿Cuál es el resultado de $\sqrt{\frac{1}{32}} \div \sqrt{\frac{1}{8}}$?

Solución:

Se descomponen las bases en factores primos y se aplican las propiedades:

$$\sqrt{\frac{1}{32}} \div \sqrt{\frac{1}{8}} = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^5} \div \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^3} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{5}{2}} \div \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{3}{2}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{5}{2}-\frac{3}{2}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{2}{2}} = \frac{1}{2}$$

ACTIVIDAD N°2

I – Resuelva las siguientes operaciones de radicación de fracciones en su cuaderno de matemáticas.

1. $\sqrt{\frac{16}{25}}$

2. $\sqrt[3]{-\frac{1}{8}}$

3. $\sqrt{\frac{64}{25} \div \frac{16}{49}}$

4. $\sqrt[3]{\sqrt{\frac{64}{729}}}$

5. $\sqrt{25} \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{125}}$

6. $\sqrt{\frac{1}{32}} \div \sqrt{2}$

7. $\left(\sqrt[3]{-\frac{1}{512}}\right)\left(\sqrt{64}\right)$

8. $\left(\sqrt{\frac{72}{75}}\right)\left(\sqrt{\frac{12}{288}}\right)$

¡Felicidades! Culminamos el repaso con el Tema 2. **Ahora si pasamos al ÁLGEBRA.**

TEMA 3. POTENCIACIÓN CON EXPRESIONES ALGEBRAICAS

Para la simplificación de expresiones algebraicas con potencias, resulta útil el empleo de las propiedades de la potenciación, pues facilitan el procedimiento en su solución.

- Observemos los siguientes ejemplos de simplificación de expresiones algebraicas con potencias:

1) $\dfrac{x^6}{x^4} = x^{6-4} = x^2$

2) $\dfrac{m^2}{m^5} = \dfrac{1}{m^{5-2}} = \dfrac{1}{m^3}$

3) $\dfrac{9a^5b^3}{3a^4b^6} = \dfrac{3^2a^5b^3}{3a^4b^6} = \dfrac{3^{2-1}a^{5-4}}{b^{6-3}} = \dfrac{3a}{b^3}$

4) $[(2xy^2)^3]^2 = (2xy^2)^{3\cdot 2} = (2xy^2)^6 = 64x^6y^{12}$

5) $(3x^2y^4)^3(3xy^3)^2 = (3^3x^6y^{12})(3^2x^2y^6) = 3^{3+2}x^{6+2}y^{12+6} = 3^5x^8y^{18} = 243x^8y^{18}$

6) $\left(\dfrac{2^2x^2yz^2}{3x^2yz}\right)^3\left(\dfrac{3x^2z}{2^3x}\right)^2 = \left(\dfrac{2^6x^6y^3z^6}{3^3x^6y^3z^3}\right)\left(\dfrac{3^2x^4z^2}{2^6x^2}\right) = \dfrac{2^6\cdot 3^2x^{10}y^3z^8}{2^6\cdot 3^3x^8y^3z^3} = \dfrac{x^2z^5}{3}$

7) $\dfrac{5m^{-7}n^{13}}{5^{-2}m^{-10}n^9} = \dfrac{5\cdot 5^2m^{10}n^{13}n^{-9}}{m^7} = 5^{1+2}m^{10-7}n^{13-9} = 5^3m^3n^3 = 125m^3n^3$

8) $\left(\dfrac{6a^{-1}b^{-5}c^8}{2b^{-7}c^5}\right)^{-2} = \left(\dfrac{6b^7c^8}{2ab^5c^5}\right)^{-2} = \left(\dfrac{3b^2c^3}{a}\right)^{-2} = \dfrac{3^{-2}b^{-4}c^{-6}}{a^{-2}} = \dfrac{a^2}{3^2b^4c^6} = \dfrac{a^2}{9b^4c^6}$

9) $\left(x^{\frac{5}{2}} - 3x^{\frac{1}{2}}y\right)^2 = \left(x^{\frac{5}{2}}\right)^2 - 2\left(x^{\frac{5}{2}}\right)\left(3x^{\frac{1}{2}}y\right) + \left(3x^{\frac{1}{2}}y\right)^2 = x^5 - 6x^3y + 9xy^2$

10) $\left[\left(\dfrac{2^{\frac{9}{2}}mn^{-6}}{2^{-\frac{3}{2}}m^{-3}n^{-14}}\right)\right]^{-\frac{1}{2}} = \left(2^{\frac{9}{2}+\frac{3}{2}}m^{1+3}n^{14-6}\right)^{-\frac{1}{2}} = \left(2^6m^4n^8\right)^{-\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{(2^6m^4n^8)^{\frac{1}{2}}}$

$= \dfrac{1}{2^3m^2n^4}$

ACTIVIDAD N°3

I- Simplifica las siguientes expresiones algebraicas utilizando las propiedades de la potenciación.

1) $\frac{x^3}{x^2}$

6) $\left(\frac{3^2a^2c^5}{2^3b^3c^2}\right)^2\left(\frac{2^2a^3b^2}{3a^3c^3}\right)^4$

11) $\left(7^{-\frac{3}{8}}x^{\frac{3}{4}}y^{-\frac{2}{5}}z^{\frac{7}{3}}\right)\left(7^{\frac{11}{8}}x^{\frac{1}{4}}y^{-\frac{3}{5}}z^{\frac{2}{3}}\right)$

2) $\frac{\boldsymbol{6m^7n^4}}{\boldsymbol{12m^{10}n^3}}$

7) $\frac{\boldsymbol{2^{-5}x^4y^{-5}}}{\boldsymbol{2^{-3}x^7y^{-1}}}$

12) $\left(\boldsymbol{m^{\frac{7}{2}}+\frac{3}{4}}\right)\left(\boldsymbol{m^{\frac{7}{2}}-\frac{2}{3}}\right)$

3) $\boldsymbol{4(x-2y)^{-1}}$

8) $\left(\frac{1}{2}m^3n^7\right)^3\left(\frac{1}{2}x^4y^9\right)^{-2}$

13) $\left(\frac{a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{3}{4}}c^{\frac{1}{5}}}{a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{5}{12}}c^{-\frac{3}{10}}}\right)^6$

4) $\boldsymbol{\left[\left(3m^2n^4\right)^2\right]^3}$

9) $(3x^4+5y^3)(3x^4-5y^3)$

14) $\left[\left(\frac{375x^{-2}y^{\frac{2}{3}}z^4}{3x^{-11}y^{-\frac{7}{3}}z^{-2}}\right)^{-1}\right]^{-\frac{1}{3}}$

5) $\boldsymbol{\left(\frac{4^{-3}m^{-1}n^{-3}}{2^{-6}m^{-2}n^{-2}}\right)^{-2}}$

10) $\left(2a^{\frac{3}{2}}b^{\frac{1}{2}}+5b^{\frac{7}{2}}\right)^2$

15) $\left[\left(\frac{36x^{\frac{1}{2}}y^3}{9y^{-\frac{2}{3}}}\right)^{\frac{2}{5}}\left(\frac{4z^{-\frac{1}{3}}}{8x^5z^{\frac{4}{3}}}\right)^{-3}\right]^0$

¡Lo has logrado! Culminamos el Tema 3.

TEMA 4. LA RADICACIÓN CON EXPRESIONES ALGEBRAICAS

La raíz enésima de un número a es otro número b que elevado a la potencia n da como resultado a.

- Repasemos las propiedades de los radicales

$$\sqrt[n]{a} = b \Longrightarrow b^n = a$$

- $\sqrt[n]{\boldsymbol{a \cdot b \cdot c}} = \sqrt[n]{\boldsymbol{a}} \cdot \sqrt[n]{\boldsymbol{b}} \cdot \sqrt[n]{\boldsymbol{c}}$
- $\sqrt[n]{\frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{b}}} = \frac{\sqrt[n]{\boldsymbol{a}}}{\sqrt[n]{\boldsymbol{b}}}$
- $\left(\sqrt[n]{\boldsymbol{a}}\right)^{\boldsymbol{m}} = \sqrt[n]{\boldsymbol{a^m}}$
- $\sqrt[m]{\sqrt[n]{\boldsymbol{a}}} = \sqrt[mn]{\boldsymbol{a}}$
- $\sqrt[n]{\boldsymbol{a^m}} = \sqrt[kn]{\boldsymbol{a^{km}}}$
- $\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[\frac{n}{k}]{a^{\frac{m}{k}}}$
- $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$

Estas propiedades son fundamentales para facilitar el proceso de solución de las expresiones algebraicas con radicales, tanto en la extracción como en la introducción de factores al radical y en la simplificación.

- Observemos los siguientes ejemplos de simplificación de radicales con expresiones algebraicas:

1) $\sqrt[3]{8a^3b^6c^8} = \sqrt[3]{2^3a^3b^6c^6c^2} = 2ab^2c^2\sqrt[3]{c^2}$

2) $\sqrt[5]{\frac{x^4 - x^3}{32x^3}} = \sqrt[5]{\frac{x^3(x-1)}{2^5x^3}} = \sqrt[5]{\frac{x-1}{2^5}} = \frac{\sqrt[5]{x-1}}{\sqrt[5]{2^5}} = \frac{\sqrt[5]{x-1}}{2}$

3) $\sqrt[4]{81x^2y^6} = \sqrt[4]{3^4x^2y^4y^2} = 3y\sqrt[4]{x^2y^2} = 3y\sqrt[4]{(xy)^2} = 3y\sqrt{xy}$

4) $\sqrt{\frac{72x^5y^3z}{3x^3y}} = \sqrt{24x^2y^2z} = 2xy\sqrt{6z}$

5) $\sqrt{25a^4 + 30a^2b + 9b^2} = \sqrt{(5a^2 + 3b)^2} = 5a^2 + 3b$

6) $\sqrt[6]{x^2-10x+25} = \sqrt[6]{(x-5)^2} = \sqrt[3]{x-5}$

7) $[\sqrt{4(x-1)}]^3 = \sqrt{[2^2(x-1)]^3} = \sqrt{2^6(x-1)^3} = 2^3(x-1)\sqrt{x-1}$

$= 8(x-1)\sqrt{x-1}$

8) $\left[\sqrt[6]{\frac{36x^7y^3}{2x^5y^2}}\right]^3 = [\sqrt[6]{18x^2y}]^3 = \sqrt[6]{(18x^2y)^3} = \sqrt{18x^2y} = 3x\sqrt{2y}$

9) $\sqrt[3]{\sqrt{729m^8n^{10}}} = \sqrt[6]{3^6m^6m^2n^6n^4} = 3mn\sqrt[6]{m^2n^4} = 3mn\sqrt[3]{mn^2}$

10) $[\sqrt[8]{16a^6b^2c^8}]^2 = \sqrt[8]{(2^4a^6b^2c^8)^2} = \sqrt[8]{(2^2a^3bc^4)^4} = \sqrt{2^2a^3bc^4} = 2ac^2\sqrt{ab}$

ACTIVIDAD N°4.1

I-Simplifica los siguientes radicales con expresiones algebraicas.

1) $\sqrt{100a^3b^4c^2}$

6) $[\sqrt[5]{a+b}]^{11}$

11) $\sqrt[3]{108(a+b)^4}$

2) $\sqrt[4]{24x^5y^{12}}$

7) $\sqrt{16(m+n)^3}$

12) $\sqrt[4]{48a^6b^2}$

3) $\sqrt[3]{\frac{27a^6b^2}{64c^3}}$

8) $\sqrt[3]{\frac{500x^9y^{11}}{2x^6y^{10}}}$

13) $[\sqrt[6]{8x^2y}]^4$

4) $\sqrt[6]{128m^3n^{12}}$

9) $\sqrt{\sqrt{\frac{1}{81x^4}}}$

14) $\sqrt{\sqrt[3]{128x^7y^6}}$

5) $\sqrt[4]{x^2+6x+9}$

10) $[\sqrt[6]{375a^4b^3}]^2$

15) $\sqrt{12mn^2+20n^3}$

- Observemos los siguientes ejemplos de introducción de un factor a un radical.

Para introducir un factor en un radical, debemos multiplicar el exponente del factor externo por el índice del radical y la potencia resultante multiplica la base del radical, es decir:

$$\boldsymbol{a^m\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^{mn}b}}$$

Note que: si se pueden extraer factores de un radical, también se pueden introducir.

1) $3x\sqrt{y} = \sqrt{3^2x^2y} = \sqrt{9x^2y}$

2) $x^2y\sqrt[4]{y^3z^2} = \sqrt[4]{x^8y^7z^2}$

3) $2(a+b)\sqrt{3} = \sqrt{2^2\cdot 3(a+b)^2} = \sqrt{12(a+b)^2}$

4) $(m-n)\sqrt[3]{\dfrac{1}{m-n}} = \sqrt[3]{\dfrac{(m-n)^3}{m-n}} = \sqrt[3]{(m-n)^2}$

5) $\dfrac{3}{x^2}\sqrt[4]{\dfrac{x^3}{27}} = \sqrt[4]{\dfrac{3^4x^3}{3^3x^8}} = \sqrt[4]{\dfrac{3}{x^5}}$

6) $\dfrac{1}{x-2}\sqrt{x^2+3x-10} = \sqrt{\dfrac{(x+5)(x-2)}{(x-2)^2}} = \sqrt{\dfrac{x+5}{x-2}}$

7) $(x+y)\sqrt[3]{\dfrac{2}{x^2+2xy+y_2}} = \sqrt[3]{\dfrac{2(x+y)^3}{(x+y)^2}} = \sqrt[3]{2(x+y)} = \sqrt[3]{2x+2y}$

8) $\dfrac{\sqrt{(3x^2+3x-60)}}{x-4} = \sqrt{\dfrac{3(x^2+x-20)}{(x-4)^2}} = \sqrt{\dfrac{3(x+5)(x-4)}{(x-4)^2}} = \sqrt{\dfrac{3(x+5)}{(x-4)}} = \sqrt{\dfrac{3x+15}{x-4}}$

9) $(m+3)\sqrt[3]{\dfrac{(m-3)^2}{m+3}} = \sqrt[3]{\dfrac{(m+3)^3(m-3)^2}{m+3}} = \sqrt[3]{\dfrac{[(m+3)(m-3)]^2(m+3)}{m+3}} = \sqrt[3]{(m^2-9)^2}$

10) $(x+4)\sqrt{\dfrac{x^2-4x+16}{x+4}} = \sqrt{\dfrac{(x+4)^2(x^2-4x+16)}{x+4}} = \sqrt{\dfrac{(x+4)(x^3+64)}{x+4}} = \sqrt{x^3+64}$

ACTIVIDAD N°4.2

I-Introduzca en el radical el factor externo.

1) $5x\sqrt{2y}$ 6) $\sqrt{\dfrac{m^2-1}{m+1}}$ 11) $\dfrac{3n}{m}\sqrt{\dfrac{m}{18n^3}}$

2) $\boldsymbol{mn\sqrt[3]{3m^2}}$ 7) $\boldsymbol{\dfrac{2a}{3b}\sqrt[3]{\dfrac{a}{3b^2}}}$ 12) $\boldsymbol{\dfrac{yz^2}{2x}\sqrt[5]{\dfrac{224x^7}{y^4z^9}}}$

3) $\boldsymbol{\dfrac{3}{xy^2}\sqrt[5]{4x^4y^{11}z}}$ 8) $\dfrac{1}{x+2}\sqrt{x^2+3x+2}$ 13) $(x-2)\sqrt{\dfrac{x^2+2x+4}{x^2-4}}$

4) $\boldsymbol{a^2b\sqrt[4]{ab^2}}$ 9) $(a+b)\sqrt{\dfrac{a-b}{a+b}}$ 14) $(x+7)\sqrt{\dfrac{1}{x^2+8x+7}}$

5) $\boldsymbol{2x^4\sqrt{x+y}}$ 10) $2(x-y)\sqrt{(x+y)^2}$ 15) $2x\sqrt[3]{\dfrac{x^2-9}{4(x+3)}}$

¡Muy bien! **Ha culminado el Tema 4**

TEMA 5. ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO CON UNA INCÓGNITA

- ***Ecuación de segundo grado.***
  Es toda ecuación en la cual, una vez simplificada, el mayor exponente de la incógnita es 2. Así, las ecuaciones $3x^2 - 4x + 7 = 0$; $-x^2 + 5x = 0$; $4x^2 - 25 = 0$ son ecuación de segundo grado.
- ***Ecuaciones Completas* de segundo grado.**
  Son ecuaciones de la forma $ax^2 + bx + c = 0$.
  Así, $x^2 + 8x + 15 = 0$ y $3x^2 - x = 2$ son ecuaciones completas de segundo grado.
- ***Ecuaciones Incompletas de segundo grado.***
  Son ecuaciones de la forma $ax^2 + c = 0$ o $ax^2 + bx = 0$. Así, $x^2 - 9 = 0$ y $3x^2 + 5x = 0$ son ecuaciones incompletas de segundo grado.
- ***Solución de una Ecuación Cuadrática.***
  Resolver una ecuación cuadrática es hallar el valor de la incógnita que satisfacen la ecuación, es decir, los valores de x que hacen que $ax^2 + bx + c = 0$. A estos valores se les llama solución o raíces de la ecuación y como la ecuación es de segundo grado, tiene dos raíces iguales o diferentes según sea el caso. Así, las raíces de la ecuación $x^2 + 3x - 28 = 0$ son $x_1 = -7$ y $x_2 = 4$; ambos valores satisfacen la ecuación.

- Solución de una ecuación incompleta

A. Ecuación de la forma $ax^2 + c = 0$

Ejemplo 1: Hallar las raíces de la ecuación $x^2 - 16 = 0$.

Solución:

$x^2 - 16 = 0$
$x^2 = 16$ *despejando x*
$\sqrt{x^2} = \sqrt{16}$ *extrayendo la raíz cuadrada en ambos miembros*
$x = \pm 4$
$x_1 = +4$ y $x_2 = -4$

Ejemplo 2: Hallar las raíces de la ecuación $x^2 = 64$.

Solución:

$x^2 = 64$
$x = \pm\sqrt{64}$ *extrayendo la raíz cuadrada en ambos miembros*
$x = \pm 8$

Ejemplo 3: Hallar las raíces de la ecuación $4x^2 - 9 = 0$.

Solución:

$4x^2 - 9 = 0$

$4x^2 = 9$

$x^2 = \frac{9}{4}$

$x = \pm\sqrt{\frac{9}{4}}$ *extrayendo la raíz cuadrada en ambos miembros*

$x = \pm\frac{3}{2}$

Ejemplo 4: Hallar las raíces de la ecuación $x^2 = 9$.

Solución:

$x^2 = 9$
$x = \pm\sqrt{9}$ *extrayendo la raíz cuadrada en ambos miembros*
$x = \pm 3$

Ejemplo 5: Hallar las raíces de la ecuación $9x^2 - 25 = 0$.

Solución:

$9x^2 - 25 = 0$

$9x^2 = 25$

$x^2 = \frac{25}{9}$

$x = \pm\sqrt{\frac{25}{9}}$ *extrayendo la raíz cuadrada en ambos miembros*

$x = \pm\frac{5}{3}$

B. Ecuación de la forma $ax^2 + bx = 0$

Ejemplo 1: Hallar las raíces de la ecuación $x^2 + 7x = 0$.

Solución:

$x^2 + 7x = 0$ *luego factorizando,*
$x(x + 7) = 0$ *igualando cada factor a cero tenemos:*
$x = 0$; $x + 7 = 0$ *las raíces de la ecuación son:*

$x = 0$ *y* $x = -7$

Ejemplo 2: Hallar las raíces de la ecuación $x^2 = x$.

Solución:

$x^2 = x$ *pasamos al primer miembro la x*
$x^2 - x = 0$ *luego factorizando,*
$x(x-1) = 0$ *igualando cada factor a cero tenemos:*
$x = 0\,; \quad x - 1 = 0$ *las raíces de la ecuación son:*

$$x = 0 \quad y \quad x = 1$$

Ejemplo 3: Hallar las raíces de la ecuación $x^2 + 4x = 0$.

Solución:

$x^2 + 4x = 0$ *luego factorizando,*
$x(x+4) = 0$ *igualando cada factor a cero tenemos:*
$x = 0\,; \quad x + 4 = 0$ *las raíces de la ecuación son:*

$$x = 0 \quad y \quad x = -4$$

Ejemplo 4: Hallar las raíces de la ecuación $5x^2 - 3x = 0$.

Solución:

$5x^2 - 3x = 0$ *luego factorizando,*
$x(5x-3) = 0$ *igualando cada factor a cero tenemos:*
$x = 0\,; \quad 5x - 3 = 0$ *las raíces de la ecuación son:*

$$x = 0 \quad y \quad x = \frac{3}{5}$$

Ejemplo 5: Hallar las raíces de la ecuación $6x^2 = -2x$.

Solución:

$6x^2 = -2x$ *pasamos al primer miembro -2x*
$6x^2 + 2x = 0$ *luego factorizando,*
$2x(3x+1) = 0$ *igualando cada factor a cero tenemos:*
$2x = 0\,; \quad 3x + 1 = 0$
$x = \frac{0}{2}; \quad 3x = -1$ *las raíces de la ecuación son:*

$$x = 0 \quad y \quad x = -\frac{1}{3}$$

Ejemplo 6: Hallar las raíces de la ecuación $4x^2 = 12x$.

Solución:

$4x^2 = 12x$
$4x^2 - 12x = 0$ *luego factorizando,*
$4x(x-3) = 0$ *igualando cada factor a cero tenemos:*
$4x = 0\,; \quad x - 3 = 0$
$x = \frac{0}{4}; \quad x = 3$ *las raíces de la ecuación son:*

$$x = 0 \quad y \quad x = 3$$

ACTIVIDAD N°5.1

I – Determine las raíces de las siguientes ecuaciones de segundo grado incompletas de la forma $ax^2 + c = 0$, utilizando el método de factorización.

1.	$x^2 - 1 = 0$	$x = \pm 1$
2.	$x^2 - 4 = 0$	$x = \pm 2$
3.	$x^2 = 25$	$x = \pm 5$
4.	$x^2 - 100 = 0$	$x = \pm 10$
5.	$x^2 - 36 = 0$	$x = \pm 6$
6.	$x^2 = 64$	$x = \pm 8$
7.	$x^2 - 16 = 0$	$x = \pm 4$
8.	$x^2 - 169 = 0$	$x = \pm 13$
9.	$x^2 = 49$	$x = \pm 7$
10.	$x^2 - 9 = 0$	$x = \pm 3$
11.	$x^2 - 144 = 0$	$x = \pm 12$
12.	$4x^2 = 81$	$x = \pm 9/2$
13.	$25x^2 - 64 = 0$	$x = \pm 8/5$
14.	$9x^2 - 100 = 0$	$x = \pm 10/3$
15.	$4x^2 = 49$	$x = \pm 7/2$

II - Determine las raíces de las siguientes ecuaciones de segundo grado incompletas de la forma $ax^2 + bx = 0$, utilizando el método de factorización.

1.	$x^2 + 6x = 0$	$x = 0;\ x = -6$
2.	$x^2 - 2x = 0$	$x = 0;\ x = 2$
3.	$x^2 = -5x$	$x = 0;\ x = -5$
4.	$x^2 + 7x = 0$	$x = 0;\ x = -7$
5.	$x^2 - 8x = 0$	$x = 0;\ x = 8$
6.	$x^2 = 10x$	$x = 0;\ x = 10$
7.	$x^2 + x = 0$	$x = 0;\ x = -1$
8.	$3x^2 - 6x = 0$	$x = 0;\ x = 2$
9.	$x = x^2$	$x = 0;\ x = 1$
10.	$3x^2 - 18x = 0$	$x = 0;\ x = 6$
11.	$4x^2 - 2x = 0$	$x = 0;\ x = 1/2$
12.	$5x^2 = -10x$	$x = 0;\ x = -2$
13.	$3x^2 + x = 0$	$x = 0;\ x = -1/3$
14.	$2x^2 - 14x = 0$	$x = 0;\ x = 7$
15.	$6x^2 = 54x$	$x = 0;\ x = 9$

- Métodos de solución de ecuaciones de segundo grado completas

  B. Ecuación de la forma $ax^2 + bx + c = 0$

I. Método de Factorización

Ejemplo 1: resolver la ecuación $x^2 + 8x + 15 = 0$.

Solución:

$x^2 + 8x + 15 = 0$ *luego factorizando,*

$(x + 5)(x + 3) = 0$ *igualando cada factor a cero tenemos:*

$x + 5 = 0\,; \quad x + 3 = 0$ *las raíces de la ecuación son:*

$$x = -5 \quad y \quad x = -3$$

Ejemplo 2: resolver la ecuación $x^2 + 3x - 28 = 0$.

Solución:

$x^2 + 3x - 28 = 0$ *luego factorizando,*

$(x + 7)(x - 4) = 0$ *igualando cada factor a cero tenemos:*

$x + 7 = 0\,; \quad x - 4 = 0$ *las raíces de la ecuación son:*

$$x = -7 \quad y \quad x = 4$$

Ejemplo 3: resolver la ecuación $x^2 - 13x + 36 = 0$.

Solución:

$x^2 - 13x + 36 = 0$ *luego factorizando,*

$(x - 9)(x - 4) = 0$ *igualando cada factor a cero tenemos:*

$x - 9 = 0\,; \quad x - 4 = 0$ *las raíces de la ecuación son:*

$$x = 9 \quad y \quad x = 4$$

Ejemplo 4: resolver la ecuación $2x^2 - x - 6 = 0$.

Solución:

$2x^2 - x - 6 = 0$ *luego factorizando,*

$$\frac{(2x)^2 - (2x) - 12}{2} = 0$$

$$\frac{(2x - 4)(2x + 3)}{2} = 0$$

$$\frac{2(x - 2)(2x + 3)}{2} = 0$$

$(x-2)(2x+3)=0$ *igualando cada factor a cero tenemos:*

$x-2=0\,;\quad 2x+3=0$ *las raíces de la ecuación son:*

$$x=2 \quad y \quad x=-\frac{3}{2}$$

Ejemplo 5: resolver la ecuación $3x^2-11x+10=0$.

Solución:

$3x^2-11x+10=0$ *luego factorizando,*

$$\frac{(3x)^2-11(3x)+30}{3}=0$$

$$\frac{(3x-6)(3x-5)}{3}=0$$

$$\frac{3(x-2)(3x-5)}{3}=0$$

$(x-2)(3x-5)=0$ *igualando cada factor a cero tenemos:*

$x-2=0\,;\quad 3x-5=0$ *las raíces de la ecuación son:*

$$x=2 \quad y \quad x=\frac{5}{3}$$

Ejemplo 6: resolver la ecuación $8x^2+2x-21=0$.

Solución:

$8x^2+2x-21=0$ *luego factorizando,*

$$\frac{(8x)^2+2(8x)-168}{8}=0$$

$$\frac{(8x+14)(8x-12)}{8}=0$$

$$\frac{2(4x+7)4(2x-3)}{8}=0$$

$(4x+7)(2x-3)=0$ *igualando cada factor a cero tenemos:*

$4x+7=0\,;\quad 2x-3=0$

$4x=-7;\quad 2x=3$ *las raíces de la ecuación son:*

$$x=-\frac{7}{4} \quad y \quad x=\frac{3}{2}$$

II. Método de Fórmula Cuadrática o Fórmula General $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

Este método consiste en que, dada una ecuación de segundo grado, se debe sustituir los valores de los coeficientes a, b y c en la formula general para obtener las dos raíces de la ecuación.

Ejemplo 1: resolver la ecuación $x^2 + 3x - 10 = 0$.

Solución

$x^2 + 3x - 10 = 0$

$a = 1 , b = 3 , \ c = -10$ *Sustituyendo estos valores en la fórmula general tenemos:*

$$x = \frac{-(3) \pm \sqrt{(3)^2 - 4(1)(-10)}}{2(1)}$$

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{9 + 40}}{2}$$

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{49}}{2}$$

$$x = \frac{-3 \pm 7}{2}$$

$$x_1 = \frac{-3 + 7}{2} \ ; \quad x_2 = \frac{-3 - 7}{2}$$

$$x_1 = \frac{4}{2} \ ; \quad x_2 = -\frac{10}{2}$$

$$x_1 = 2 \ ; \quad x_2 = -5$$

Ejemplo 2: hallar las raíces de la ecuación $x^2 - 2x - 48 = 0$.

Solución

$x^2 - 2x - 48 = 0$

$a = 1 , b = -2 , \ c = -48$ *Sustituyendo estos valores en la fórmula general tenemos:*

$$x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4(1)(-48)}}{2(1)}$$

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 192}}{2}$$

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{196}}{2}$$

$$x = \frac{2 \pm 14}{2}$$

$$x_1 = \frac{2+14}{2}\ ; \quad x_2 = \frac{2-14}{2}$$

$$x_1 = \frac{16}{2}\ ; \quad x_2 = -\frac{12}{2}$$

$$x_1 = 8\ ; \quad x_2 = -6$$

Ejemplo 3: resolver la ecuación $3x^2 - 7x + 2 = 0$.

Solución

$3x^2 - 7x + 2 = 0$

$a = 3\ ,\ b = -7\ ,\ c = 2$ *Sustituyendo estos valores en la fórmula general tenemos:*

$$x = \frac{-(-7) \pm \sqrt{(-7)^2 - 4(3)(2)}}{2(3)}$$

$$x = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 24}}{6}$$

$$x = \frac{7 \pm \sqrt{25}}{6}$$

$$x_1 = \frac{7+5}{6}\ ; \quad x_2 = \frac{7-5}{6}$$

$$x_1 = \frac{12}{6}\ ; \quad x_2 = \frac{2}{6}$$

$$x_1 = 2\ ; \quad x_2 = \frac{1}{3}$$

Ejemplo 4: resolver la ecuación $x^2 - 6x + 9 = 0$.

Solución

$x^2 - 6x + 9 = 0$

$a = 1\ ,\ b = -6\ ,\ c = 9$ *Sustituyendo estos valores en la fórmula general tenemos:*

$$x = \frac{-(-6) \pm \sqrt{(-6)^2 - 4(1)(9)}}{2(1)}$$

$$x = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 36}}{2}$$

$$x = \frac{6 \pm 0}{2}$$

$x = \frac{6}{2}$

$x = 3$

Entonces x tiene un solo valor y es 3; las dos raíces son iguales. $x_1 = x_2 = 3$.

Ejemplo 5: hallar las raíces de la ecuación $2x^2 + 5x + 3 = 0$.

Solución

$2x^2 + 5x + 3 = 0$

$a = 2\,,\ b = 5\,,\ c = 3$ *Sustituyendo estos valores en la fórmula general tenemos:*

$$x = \frac{-(5) \pm \sqrt{(5)^2 - 4(2)(3)}}{2(2)}$$

$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{25 - 24}}{4}$$

$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{1}}{4}$$

$$x = \frac{-5 \pm 1}{4}$$

$$x_1 = \frac{-5+1}{4}\ ; \quad x_2 = \frac{-5-1}{4}$$

$$x_1 = \frac{-4}{4}\ ; \quad x_2 = \frac{-6}{4}$$

$$x_1 = -1\ ; \quad x_2 = -\frac{3}{2}$$

III. Método de Completar Cuadrado

Para aplicar el método de completar el cuadrado a una ecuación de la forma $ax^2 + bx + c = 0$, es necesario que el coeficiente $a = 1$.

Ejemplo 1: hallar las raíces de la ecuación $x^2 + 4x - 45 = 0$.

Solución

$x^2 + 4x - 45 = 0$ *completando el cuadrado tenemos que:*

$x^2 + 4x + \left(\frac{4}{2}\right)^2 = \left(\frac{4}{2}\right)^2 + 45$

$x^2 + 4x + 4 = 4 + 45$ *luego factorizando,*

$(x + 2)^2 = 49$

$x + 2 = \pm\sqrt{49}$

$x = -2 \pm 7$

$x_1 = -2 + 7 \quad y \quad x_2 = -2 - 7$

$x_1 = 5 \qquad y \quad x_2 = -9$

Ejemplo 2: hallar las raíces de la ecuación $x^2 - 6x - 7 = 0$.

Solución:

$x^2 - 6x - 7 = 0$ *completando el cuadrado tenemos que:*

$x^2 - 6x + \left(\frac{6}{2}\right)^2 = \left(\frac{6}{2}\right)^2 + 7$

$x^2 - 6x + 9 = 9 + 7$ *luego factorizando,*

$(x - 3)^2 = 16$ *al extraer la raíz cuadrada en ambos miembros tenemos:*

$x - 3 = \pm\sqrt{16}$

$x = 3 \pm \sqrt{16}$

$x_1 = 3 + 4 \quad y \quad x_2 = 3 - 4$

$x_1 = 7 \qquad y \quad x_2 = -1$

Ejemplo 3: resolver la ecuación $x^2 - 7x + 12 = 0$.

Solución

$x^2 - 7x + 12 = 0$ *completando el cuadrado tenemos que:*

$x^2 - 7x + \left(\frac{7}{2}\right)^2 = \left(\frac{7}{2}\right)^2 - 12$ *luego factorizando,*

$\left(x - \frac{7}{2}\right)^2 = \frac{49}{4} - 12$

$\left(x - \frac{7}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$ *al extraer la raíz cuadrada en ambos miembros tenemos:*

$x - \frac{7}{2} = \pm\sqrt{\frac{1}{4}}$

$x = \frac{7}{2} \pm \frac{1}{2}$

$x_1 = \frac{7}{2} + \frac{1}{2} \quad y \quad x_2 = \frac{7}{2} - \frac{1}{2}$

$x_1 = 4 \qquad y \quad x_2 = 3$

Ejemplo 4: resolver la ecuación $3x^2 - 2x - 8 = 0.$

Solución

$3x^2 - 2x - 8 = 0$

Dividiendo entre tres cada término de la ecuación tenemos:

$x^2 - \frac{2}{3}x - \frac{8}{3} = 0$ *completando el cuadrado tenemos que:*

$x^2 - \frac{2}{3}x + \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \frac{8}{3}$

$x^2 - \frac{2}{3}x + \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9} + \frac{8}{3}$ *factorizamos,*

$\left(x - \frac{1}{3}\right)^2 = \frac{25}{9}$ *al extraer la raíz cuadrada en ambos miembros tenemos:*

$x - \frac{1}{3} = \pm\sqrt{\frac{25}{9}}$

$x = \frac{1}{3} \pm \frac{5}{3}$

$x_1 = \frac{1}{3} + \frac{5}{3}\,; \quad x_2 = \frac{1}{3} - \frac{5}{3}$

$x_1 = 2\,; \quad x_2 = -\frac{4}{3}$

Ejemplo 5: resolver la ecuación $5x^2 - 7x + 2 = 0.$

Solución

$5x^2 - 7x + 2 = 0$

Dividiendo cada término de la ecuación entre cinco, tenemos:

$x^2 - \frac{7}{5}x + \frac{2}{5} = 0$ *completando el cuadrado tenemos que:*

$x^2 - \frac{7}{5}x + \left(\frac{7}{10}\right)^2 = \left(\frac{7}{10}\right)^2 - \frac{2}{5}$ *factorizamos,*

$\left(x - \frac{7}{10}\right)^2 = \frac{49}{100} - \frac{2}{5}$

$(x-\frac{7}{10})^2 = \frac{9}{100}$ *al extraer la raíz cuadrada en ambos miembros tenemos:*

$x-\frac{7}{10} = \pm\sqrt{\frac{9}{100}}$

$x = \frac{7}{10} \pm \frac{3}{10}$

$x_1 = \frac{7}{10} + \frac{3}{10}$; $x_2 = \frac{7}{10} - \frac{3}{10}$

$x_1 = 1$; $x_2 = \frac{2}{5}$

Ejemplo 6: hallar las raíces de la ecuación $x^2 + 4x - 5 = 0$.

Solución

$x^2 + 4x - 5 = 0$ *completando el cuadrado tenemos que:*

$x^2 + 4x + (\frac{4}{2})^2 = (\frac{4}{2})^2 + 5$

$x^2 + 4x + 4 = 4 + 5$ *factorizamos,*

$(x+2)^2 = 9$ *al extraer la raíz cuadrada en ambos miembros tenemos:*

$x + 2 = \pm\sqrt{9}$

$x = -2 \pm 3$

$x_1 = -2 + 3$ y $x_2 = -2 - 3$

$x_1 = 1$ y $x_2 = -5$

ACTIVIDAD N°5.2

I- Resuelva las siguientes ecuaciones de segundo grado por el método indicado.

I. Método Factorización

1. $x^2 + 3x - 10 = 0$ $x_1 = -5$; $x_2 = 2$

2. $x^2 - 3x + 2 = 0$ $x_1 = 2$; $x_2 = 1$

3.	$x^2 - 9x + 18 = 0$	$x_1 = 6$;	$x_2 = 3$
4.	$x^2 - 6x + 8 = 0$	$x_1 = 4$;	$x_2 = 2$
5.	$x^2 + 6x - 7 = 0$	$x_1 = -7$;	$x_2 = 1$
6.	$2x^2 - 5x - 42 = 0$	$x_1 = -7/2$;	$x_2 = 6$
7.	$x^2 - x - 20 = 0$	$x_1 = -4$;	$x_2 = 5$
8.	$4x^2 - 13x + 10 = 0$	$x_1 = 5/4$;	$x_2 = 2$
9.	$x^2 + 14x + 48 = 0$	$x_1 = -8$;	$x_2 = -6$
10.	$6x^2 + 11x + 4 = 0$	$x_1 = -4/3$;	$x_2 = -1/2$
11.	$x^2 - 3x - 70 = 0$	$x_1 = 10$;	$x_2 = -7$
12.	$x^2 - 9x + 20 = 0$	$x_1 = 5$;	$x_2 = 4$
13.	$15x^2 - 4x - 32 = 0$	$x_1 = -4/3$;	$x_2 = 8/5$
14.	$x^2 + 14x + 33 = 0$	$x_1 = -11$;	$x_2 = -3$
15.	$x^2 - 10x - 24 = 0$	$x_1 = 12$;	$x_2 = -2$

II. Método de Fórmula General

1. $x^2 - 16x + 63 = 0$ $x_1 = 9$; $x_2 = 7$

2. $x^2 + 11x + 24 = 0$ $x_1 = -8$; $x_2 = -3$

3. $x^2 - x - 20 = 0$ $x_1 = 5$; $x_2 = -4$

4. $x^2 + 15x + 56 = 0$ $x_1 = -8$; $x_2 = -7$

5. $x^2 - 5x - 6 = 0$ $x_1 = 6$; $x_2 = -1$

6. $x^2 - 7x + 12 = 0$ $x_1 = 4$; $x_2 = 3$

7. $x^2 + 12x + 20 = 0$ $x_1 = -10$; $x_2 = -2$

8. $x^2 - 2x - 3 = 0$ $x_1 = 3$; $x_2 = -1$

9. $x^2 - 18x + 77 = 0$ $x_1 = 11$; $x_2 = 7$

10. $3x^2 + 17x + 10 = 0$ $x_1 = -2/3$; $x_2 = -5$

11. $2x^2 + x - 3 = 0$ $x_1 = -3/2$; $x_2 = 1$

12. $4x^2 - 11x - 3 = 0$ $x_1 = -1/4$; $x_2 = 3$

13. $x^2 - 20x + 96 = 0$ $x_1 = 12$; $x_2 = 8$

14. $2x^2 - 13x - 7 = 0$ $x_1 = -1/2$; $x_2 = 7$

15. $6x^2 - 31x + 35 = 0$ $x_1 = 5/3$; $x_2 = 7/2$

III. Método de Completar Cuadrado

1. $x^2 - 8x - 9 = 0$ $\quad x_1 = 9$; $\quad x_2 = -1$

2. $\mathbf{2x^2 + 40x - 42 = 0}$ $\quad \mathbf{x_1 = 1}$; $\quad \mathbf{x_2 = -21}$

---

3. $x^2 - 4x - 32 = 0$ $\quad x_1 = 8$; $\quad x_2 = -4$

4. $x^2 - 9x + 18 = 0$ $\quad x_1 = 6$; $\quad x_2 = 3$

5. $x^2 + 2x - 35 = 0$ $\quad x_1 = -7$; $\quad x_2 = 5$

6. $x^2 - 7x + 12 = 0$ $\quad x_1 = 4$; $\quad x_2 = 3$

7. $3x^2 - 5x - 2 = 0$ $\quad x_1 = -1/3$; $\quad x_2 = 2$

8. $x^2 - 2x - 3 = 0$ $\quad x_1 = 3$; $\quad x_2 = -1$

9. $2x^2 - 21x + 54 = 0$ $\quad x_1 = 9/2$; $\quad x_2 = 6$

10. $4x^2 + 7x - 15 = 0$ $\quad x_1 = 5/4$; $\quad x_2 = -3$

11. $x^2 - 6x - 40 = 0$ $\quad x_1 = 10$; $\quad x_2 = -4$

12. $4x^2 - 11x - 3 = 0$ $\quad x_1 = -1/4$; $\quad x_2 = 3$

13. $x^2 - 3x + 2 = 0$ $\quad x_1 = 2$; $\quad x_2 = 1$

14. $6x^2 - 7x - 3 = 0$ $\quad x_1 = -1/3$; $\quad x_2 = 3/2$

15. $3x^2 - 25x + 28 = 0$ $\quad x_1 = 4/3$; $\quad x_2 = 7$

II- Completa las casillas con la información solicitada

APLICAMOS LO APRENDIDO ¡Adelante!

Ecuación Cuadrática	Clasificación (Coloque un gancho √)		Coloque los valores de los coeficientes		
	Completas	Incompletas	a	b	c
$x^2 + 2x + 7 = 0$					
$2x^2 + x = 0$					
$4y - 3 + 5y^2 = 0$					
$x^2 - 36 = 0$					
$8x^2 - 3x = -5$					

Base	Exponente	Potencia
-2	4	
	3	125
4		4096
-8	1	
	2	400
3		1

¡EXCELENTE! Ha culminado el Tema 5.

TEMA 6. RAZÓN Y PROPORCIÓN

- **Concepto de razón y proporción**
  - **Razón**

Una razón es una comparación entre dos o más cantidades. Puede expresarse mediante una fracción. Si las cantidades a comparar son a y b, la razón entre ellas se escribe como:

$$a:b,\quad a/b \text{ ó } \frac{a}{b} \; se\ lee \quad "a\ es\ a\ b"$$

Donde **"*a*"**, es el antecedente y **"*b*"** es el consecuente.

Ejemplo 1: en una sala de clases hay 10 mujeres y 20 hombres. ¿Qué relación numérica existe entre el número de mujeres y el número de hombres?

Solución:

La relación entre el número de mujeres y el número de hombres es de "10 es a 20".

El término 10 es el antecedente de la razón y el 20, el consecuente.

$$\frac{10 \;\rightarrow antecedente}{20 \;\rightarrow consecuente}$$

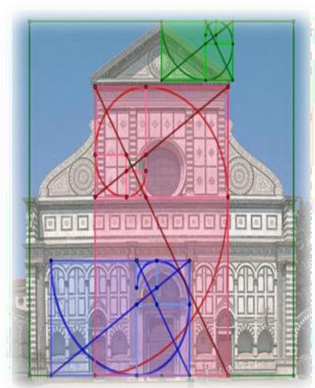
El resultado de la división o cociente entre el antecedente y el consecuente se denomina valor de la razón:

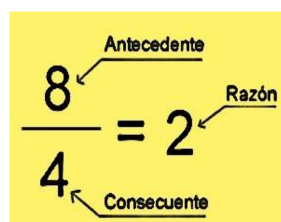
$$\frac{10}{20} = 0.5\; valor\ de\ la\ razón$$

Que se interpreta como: "por cada mujer hay dos varones".

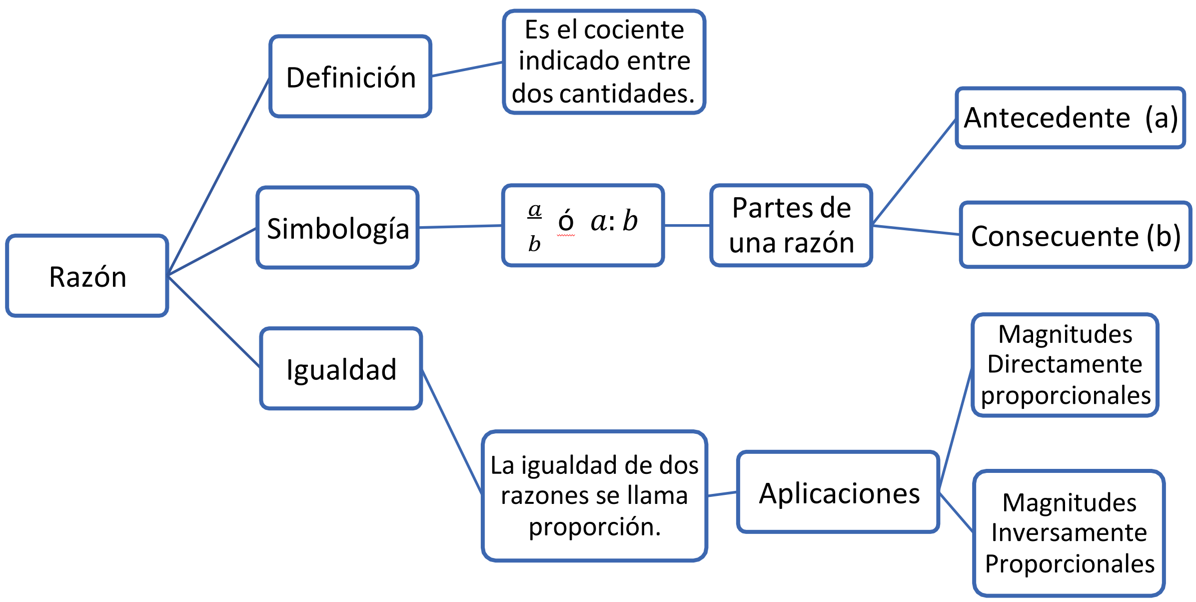
SABÍAS QUE..

El estudio de las razones y proporciones se inicia como solución de problemas de repartos proporcionales, el cobro de impuestos, el cambio de moneda y también aspectos geométricos relacionados con la medición y semejanza de figuras utilizadas para la construcción de edificios templos.





- **Mapa de conceptos**



- **Aplicación de la razón**

Las razones se utilizan en la práctica para determinar cómo está variando una cantidad con respecto a otra. Dos o más razones son equivalentes cuando tienen igual valor.

Ejemplo 2: se compra en una empresa constructora 27 sacos de cemento y 18 sacos de arena. Halle la razón de mezcla de sacos de cemento en comparación con los sacos de arena.

Solución:

Los datos son los siguientes:

- Saco de cemento 27
- Saco de arena: 18

Luego,

$$27 : 18 = \frac{27}{18} = \frac{3}{2}$$

$3 : 2$ ¨$3\ es\ a\ 2$¨

Por cada 3 sacos de cemento se deben mezclar 2 sacos de arena.

Ejemplo 3: en un colegio hay 300 señoritas y 200 varones. Determine las siguientes razones.

a) Razón entre las señoritas y el total de alumnos.
b) Razón entre los varones y el total de alumnos.

Solución:

La cantidad total de alumno es 500:

a) Razón entre las señoritas y el total de alumnos es:

$$\frac{300}{500} = \frac{3}{5}$$

b) Razón entre los varones y el total de alumnos es:

$$\frac{200}{500} = \frac{2}{5}$$

Ejemplo 4: En un parqueadero de un centro comercial hay 160 automóviles y 80 motos. Determine las siguientes razones.

a) Razón entre el número de motos y los automóviles.

b) Razón entre el número de automóviles y el número total de vehículos.

c) Razón entre el número de motos y el número total de vehículos.

Solución

a) La razón entre el número de motos y los automóviles es: por cada moto hay 2 autos.

$$\frac{80}{160} = \frac{1}{2}$$

b) La razón entre el número de automóviles y el número total de vehículos es: por cada 2 autos hay 3 vehículos.

$$\frac{160}{240} = \frac{2}{3}$$

c) La razón entre el número de motos y el número total de vehículos es: por cada moto hay tres vehículos.

$$\frac{80}{240} = \frac{1}{3}$$

ACTIVIDAD N°6.1

Instrucciones: Identifique 12 palabra escondidas entre el conjunto de letras del recuadro, las palabras son relativas a la temática razón y proporción.

Antecedente	**Comparación**	**Razón**	**Inversa**
Directa	**Numero**	**Cociente**	**Compuesta**
Consecuente	**Igualdad**	**Magnitud**	**Proporción**

Y	I	M	I	G	P	L	D	C	A	N	P	C	C
R	M	P	R	D	R	N	Q	R	T	F	A	W	O
A	M	N	I	E	O	K	N	C	G	M	N	L	C
Z	N	H	N	M	P	C	K	O	J	O	T	X	I
O	P	S	V	E	O	O	W	N	H	H	E	N	E
N	D	L	E	I	R	M	C	S	M	L	C	U	N
C	I	V	R	G	C	P	O	E	A	I	E	M	T
Z	R	A	S	U	I	A	M	C	G	V	D	E	E
L	E	D	A	A	Ó	R	P	U	N	M	E	R	I
U	C	O	Q	L	N	A	U	E	I	Z	N	O	F
R	T	X	V	D	H	C	E	N	T	E	T	O	T
L	A	W	A	A	K	I	S	T	U	E	E	V	Z
U	V	L	S	D	Q	Ó	T	E	D	V	H	F	O
P	U	P	Y	G	K	N	A	S	T	F	R	O	D

▪ Proporción

Una proporción es una igualdad entre dos razones; El símbolo de **razón** es **: :** y se lee **¨como¨** y representa un igual. Los términos de una proporción son los extremos y los medios.

▪ Simbología

$$\mathbf{a/b} = \mathbf{c/d} \text{ ó } \boldsymbol{a} : \boldsymbol{b} :: \boldsymbol{c} : \boldsymbol{d}$$

se lee "a es a b" como "c es a d"

▪ Partes de una proporción

Términos extremos

a : b = c : d

Términos medios

▪ Propiedad fundamental

En toda proporción se cumple que el producto de los medios es igual al de los extremos.

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \quad a \cdot d = b \cdot c$$

Para demostrar que dos razones forman una proporción debe cumplir que las razones sean equivalentes. Este principio se conoce como **<u>propiedad fundamental de las proporciones</u>**. ¨En toda proporción el producto de los extremos es igual al producto de los medios¨**.**

Si tenemos la proporción:

$$\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{4}} = \frac{\mathbf{15}}{\mathbf{20}}$$

Y le aplicamos la propiedad fundamental señalada queda: 3 • 20 = 4 • 15, es decir, 60 = 60

Esta es la propiedad que nos permite detectar si dos cantidades presentadas como proporción lo son verdaderamente.

- **Propiedad de los Extremos y Medios de las Proporciones.**

De la propiedad fundamental de las proporciones se desprenden dos propiedades más:

- En toda proporción un extremo es igual al producto de los medios dividido entre el otro extremo.
- En toda proporción un medio es igual al producto de los medios dividido entre el otro medio.

Ejemplo 1: Dada la siguiente proporción $\frac{2}{4} = \frac{5}{x}$, determine el valor de x.

Solución: Multiplicando en forma de cruz por las propiedades tenemos:

$$2x = (5) \cdot (4)$$
$$x = \frac{20}{2}$$
$$x = 10$$

Ejemplo 2: Dada la siguiente proporción $20 : 10 :: x : 6$, determine el valor de x.

Solución:

$$10x = (20)(6)$$
$$x = \frac{120}{10}$$
$$x = 12$$

Ejemplo 3: Dada la siguiente proporción $7 : 6 :: 56 : x$, determine el valor de x.

Solución:

$$7x = (56)(6)$$
$$x = \frac{336}{7}$$
$$x = 48$$

Ejemplos 4: Dada las siguientes proporciones, determine el valor de x.

a) $\frac{n}{2,5} = \frac{8}{5}$

b) $\frac{5}{120} = \frac{b}{3}$

Solución:

$a)\ \ 5 \cdot n = (2{,}5)\,(8)$

$$n = \frac{(2{,}5)(8)}{5}$$

$$n = 4$$

$b)\ \ 5 \cdot 3 = 120 \cdot b$

$$b = \frac{5 \cdot 3}{120}$$

$$b = \frac{15}{120}$$

$$b = \frac{1}{8}$$

- **Aplicaciones de las proporciones**

<u>Magnitud:</u> propiedad o cualidad medible de un cuerpo*:*
longitud, capacidad, masa, tiempo, entre otros.

Magnitudes directamente proporcionales.

- Se dice que dos magnitudes son directamente proporcionales si al multiplicar o dividir una de ellas por un número, la otra queda multiplicada o dividida por el mismo número.
- Poseen una constante de proporcionalidad directa.

Aplique sus conocimientos:

- **Si para empaquetar 720 huevos se necesitan 20 cajas, ¿Cuántas cajas se necesitan para 2160 huevos?.**
  Solución:

Note que,

Huevos	Cajas
720	20
2160	x

$$\frac{720}{2160} = \frac{20}{x}$$

$$720 \cdot x = 20 \cdot 2160$$

$$x = \frac{20 \cdot 2160}{720}$$

$$x = 60$$

¿Cuántas cajas se necesitan para 3600 huevos? *Resuelva aquí* ↙

Resp.: 100 cajas

- **Un automóvil recorrió 272 kilómetros en 4 horas y 15 minutos ¿cuántos kilómetros recorrió en una hora?**

Recorrido	Horas
272 km	4 horas 15 minutos
x	1 hora

¿Cuántos kilómetros recorrió en dos horas? *Resuelva aquí* ↙

R: 128 km

Solución:

Se convierte 4 horas y 15 minutos =4,25 h.

$$\frac{272\ km}{x} = \frac{4{,}25\ h}{1\ h}$$

$$272\ km \cdot 1\ h = x \cdot 4{,}25\ h$$

$$x = \frac{272\ km \cdot 1\ h}{4{,}25\ h}$$

$$x = 64 \text{ km}$$

Magnitudes Inversamente Proporcionales

- Dos magnitudes son inversamente proporcionales cuando al multiplicar una por un número, la otra queda dividida por el mismo número.

Aplique sus conocimientos:

- **Una persona tiene 30 vacas y tiene alimento para 16 días. Si vende 18 vacas ¿Cuántos días puede alimentar las vacas que le quedan?**

Vacas	Tiempo/alimento
30	16 días
12	x

Y si vende 2 vacas más, ¿Cuántos días puede alimentar las vacas que le quedan? *Resuelva aquí* ↙

R: 48 días

Solución:

$$\frac{30}{12} = \frac{x}{16} \quad \text{invierte}$$

$$30 \cdot 16 = 12 \cdot x$$

$$x = \frac{30 \cdot 16}{12}$$

$$x = 40 \text{ días}$$

ACTIVIDAD N°6.2

I- Establezca la razón en las siguientes situaciones que se describen a continuación.

1. En un curso de música se matriculan 16 niñas y 14 niños. Determinar la razón de niñas a niños.
2. Un pastelero utiliza cinco tazas de harina y 10 paquetes de polvo para hornear al hacer un pastel mediano. ¿En qué razón el pastelero combina la harina con respecto al polvo para hornear?
3. El colegio organiza un paseo a la playa y en el bus hay 20 mujeres y 12 hombres. Determine cuál es la razón de hombres a mujeres.
4. En un salón de clases hay 20 estudiantes, al final del trimestre aprobaron 15 estudiantes y reprobaron 5. ¿Cuál fue la razón de aprobados y reprobados en el salón?

II- Verifique si las siguientes expresiones son una proporción, en caso contrario explique.

a) $\frac{20}{16} = \frac{5}{4}$ b) $\frac{5}{3} = \frac{75}{45}$ c) $\frac{17}{3} = \frac{21}{34}$

III- Encontrar el valor del término desconocido en las siguientes proporciones.

a) $2 : x :: 8 : 24$

b) $\frac{x}{25} = \frac{10}{2}$

c) $x : \frac{1}{5} :: 6 : 2$

IV-Escribe la razón entre cada par de números.

a) $60\ y\ 40$ b) $12\ y\ 4$ c) $8\ y\ 32$ d) $7\ y\ 70$

V- Escribe la razón que representa cada una de las siguientes situaciones.

a) Teresa recibe generalmente B/. 25.00 y su hermana B/.60.00, determine la relación entre las cantidades de dinero que reciben las dos.
b) Con 10 naranjas se hacen 4 vasos de jugos, ¿cuál es la razón entre naranjas y vasos?

VI- Verifique que el siguiente par de razones forman una proporción utilizando la propiedad fundamental de las proporciones.

a) $\frac{4}{9}$ y $\frac{8}{18}$ b) $15:5 :: 6:2$ d) $9:2 :: 18:4$ e) $\frac{5}{7}$ y $\frac{10}{14}$

VII- Encuentre el término desconocido en las siguientes proporciones, utilice la propiedad de extremos y medios.

a) $\frac{w}{21} = \frac{4}{7}$ b) $\frac{4}{5} = \frac{m}{100}$ c) $\frac{4}{x} = \frac{18}{9}$ e) $x:3 :: 5:15$

¡EXCELENTE! Ha culminado el Tema 6.

TEMA 7. TANTO POR CIENTO

La palabra por ciento viene del latín **"per centum",** que significa por cien, o sea el número de unidades que se toman de cada cien. El signo que se usa para indicar el por ciento es %. Se puede considerar el por ciento como un decimal que ocupa el lugar de los centésimos.

Todo por ciento se puede indicar en forma decimal o en forma de fracción con denominador 100. El tanto por ciento o porcentaje es una expresión que indica una parte de un todo.

Ejemplos:

a) $\frac{\mathbf{29}}{\mathbf{100}}$ Equivale a 29% y se lee veintinueve por ciento.

b) $\frac{\mathbf{63}}{\mathbf{100}}$ equivale a 63% y se lee sesenta y tres por ciento.

- **Reducción del tanto por ciento a su forma decimal**

Regla: para expresar un tanto por ciento en forma decimal, se suprime o elimina el símbolo de "%" y se mueve el punto decimal dos lugares hacia la izquierda, o lo que es lo mismo, se divide entre 100.

Ejemplos:

a) $25\% = 0{,}25$ También se puede obtener dividiendo entre 100, es decir $25\% = \frac{25}{100} = 0{,}25$

b) $1{,}5\% = 0{,}015$ También al dividirlo entre 100, tenemos que $1{,}5\% = \frac{1.5}{100} = 0{,}015$

- **Reducción de un decimal a tanto por ciento**

Regla: Para convertir un decimal a tanto por ciento, se mueve el punto decimal, dos lugares hacia a derecha y se coloca el símbolo de %.

Ejemplos:

a) $0{,}27 = 27\%$

b) $0{,}039 = 3{,}9\%$

c) $0{,}845 = 84{,}5\%$

Cálculo del tanto por ciento por medio de la fórmula directa

Los términos o elementos en todo tanto por ciento son:

- **La Base (B):** es el número o cantidad sobre la cual se va a efectuar la operación para obtener el por ciento. **Fórmula**:

$$P = B \cdot \frac{T}{100}$$

- **El tanto por ciento o tasa (T):** es el por ciento o número de unidades que se toman de cada cien. **Fórmula**:

$$B = \frac{P(100)}{T}$$

- **El porcentaje (P):** es la cantidad que resulta de tomar $\frac{1}{100}$ (un centésimo) de otra cantidad, cierto número de veces. **Fórmula**:

$$T = \frac{P(100)}{B}$$

Ejemplo 1: El 24% de una ciudad conformada por 5250 habitantes ha contratado el servicio de TV por cable ¿Cuántos habitantes tienen TV por cable?

Solución:
Datos: B= 5250 T=24%

Luego, reemplazamos en:

$$P = B \cdot \frac{T}{100}$$
$$P = 5250 \cdot \frac{24}{100}$$
$$P = 5250 \cdot 0{,}24$$
$$P = 1260$$

De donde 1260 personas han contratado el servicio de TV por cable.
Ejemplo 2: Si en un Colegio de 1245 estudiantes, 315 son graduandos ¿Qué porcentaje de los estudiantes son graduandos?

Solución:

Datos: B=1245 P=315

$$T=\frac{P(100)}{B}$$
$$T=\frac{315(100)}{1245}$$
$$T=\frac{31500}{1245}$$
$$T=25{,}3\%$$

El 25,3% son estudiantes graduandos

Ejemplo 3: Si 450 libros que representan un 30% de una biblioteca, fueron donados ¿cuántos libros tiene la biblioteca?

Solución:

Datos: P=450 T=30%

$$B=\frac{P(100)}{T}$$
$$B=\frac{450\ (100)}{30}$$
$$B=\frac{45000}{30}$$
$$B=1500$$

La biblioteca tiene 1500 libros

- ***Regla de tres simple Directa***

Cuando las magnitudes que intervienen en el problema son directamente proporcionales.

Pasos

- Nombra la cantidad desconocida con una variable.
- Se elabora una tabla con las magnitudes (esquema).
- Se elaboran las proporciones.
- Finalmente se encuentra el valor de la variable (Propiedad fundamental de las proporciones).

Regla de tres simple inversa

Cuando las magnitudes que interviene en el problema son magnitudes inversamente proporcionales.

Pasos

- Se nombra la cantidad desconocida con una variable.
- Se elabora una tabla de cantidades o magnitudes que intervienen.

- Se plantea las proporciones de acuerdo con el concepto de magnitudes inversamente proporcionales.
- Se busca el término desconocido.

Regla de tres compuesta

Pasos

- Se realiza una tabla o esquema con los datos ordenados.
- Se asigna una variable al dato desconocido y se compara con las otras magnitudes para determinar el tipo de proporcionalidad que hay entre ellas.
- Se plantean las proporciones teniendo en cuenta las propiedades fundamentales de la proporcionalidad compuesta.

La proporcionalidad compuesta es cuando intervienen más de dos magnitudes.

- Pueden darse tres casos fundamentales, donde surgen tres propiedades fundamentales.

Magnitud A	Magnitud B	Magnitud C
m	p	r
n	q	t

Caso 1. A es directamente proporcional a B y a C.

$$\frac{m}{n} = \frac{p}{q} \cdot \frac{r}{t}$$

Caso 2. A es inversamente proporcional a B y a C.

$$\frac{m}{n} = \frac{q}{p} \cdot \frac{t}{r}$$

Caso 3. A es directamente proporcional a B y A es inversamente proporcional a C.

$$\frac{m}{n} = \frac{p}{q} \cdot \frac{t}{r}$$

- **Cálculo del tanto por ciento por el método de la regla de tres simple**

Los problemas de tanto por ciento con regla de tres se resuelven mediante comparaciones, estableciendo previamente cada una de las unidades.

Ejemplo 1: De qué número es 35 el 4%.

Solución:

$$\begin{array}{ccc} \text{Números} & & \text{Porcentajes} \\ 35 & \rightarrow & 4 \\ x & \rightarrow & 100 \end{array}$$

Luego, se multiplica en forma de equis:

$$4x = 35 \cdot 100$$

$$4x = 3500$$

$$x = \frac{3500}{4}$$

$$x = 875$$

Por lo cual, el 4% de 875 es 35.

Ejemplo 2: Determine el 7% de 215.

Solución:

$$\begin{array}{ccc} \text{Números} & & \text{Porcentajes} \\ 215 & \rightarrow & 100 \\ x & \rightarrow & 7 \end{array}$$

Luego, se multiplica en forma de equis:

$$100x = 215 \cdot 7$$
$$100x = 1505$$

$$x = \frac{1505}{100}$$

$$x = 15{,}05$$

Por lo cual, el 7% de 215 es 15,05

ACTIVIDAD N°7

1. Transforme de porcentaje a decimal.
    a. 65%, 40%, 12%, 5%, 15%, 99%.

2. Transforme de decimal a porcentaje.
    a) 0,31 b) 0,73 c) 0,045 d) 0,064 e)0,91 f) 0,84.

3. Resuelva por el método directo.
    a) El 51% de una ciudad conformada por 3298 habitantes ha contratado el servicio de internet. ¿Cuántos habitantes tienen internet?
    b) Si en un colegio de 2941 estudiantes, 1127 son damas. ¿Qué porcentaje de los estudiantes son damas?
    c) El 36% de una ciudad conformada por 4134 habitantes ha contratado el servicio de internet y TV por cable. ¿Cuántos habitantes tienen internet y TV por cable?
    d) Si 720 estudiantes representan un 32% de un colegio. ¿Cuántos estudiantes tiene el colegio?

4. Resuelva por el método de la regla de tres simple.
    a) De qué número es 187 el 37%.
    b) Determine el 43% de 447.

5. Resuelva por el método de la regla de tres simple.
    a) De qué número es 271 el 44%.
    b) Determine el 54% de 567.

*"El éxito consiste en obtener lo que se desea.
La felicidad, en disfrutar lo que se obtiene"*

¡Felicidades! hemos desarrollado 7 temas y culminamos la ***Unidad 1.***

AUTOEVALUACIÓN A-1

Estimados Alumnos(as): con el propósito de favorecer el desarrollo del guía de aprendizaje, le presentamos la autoevaluación de la unidad 1.

La autoevaluación induce a que "los alumnos desarrollen el hábito de la reflexión, y la identificación de los propios errores, cuestión fundamental cuando se trata de formar personas con capacidad para aprender de forma autónoma". (Valero-García, M., & de Cerio, L. M. D. 2005, p.27)

La siguiente tabla, debe ser completada al culminar todos los temas, evalúese y propóngase nuevas metas en el aprendizaje. Las preguntas van conectadas a una escala que usted considerará según el trabajo realizado hasta el momento. Esta evaluación es cualitativa.

- Al completar la unidad 1, usted se autoevaluará según la siguiente escala de logros:

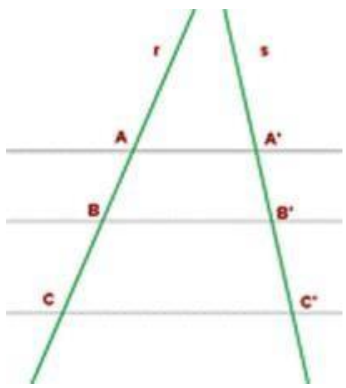
Lo he logrado	Lo estoy logrando	Estoy intentando lograrlo	No lo he Logrado
5	4	3	2

AL CONCLUIR LA UNIDAD 1, CONSIDERO QUE:	COLOQUE UN NÚMERO SEGÚN LA ESCALA
En la asimilación de todos los conceptos	
En la actitud positiva ante los retos al desarrollar los ejercicios	
En incrementar mi curiosidad por investigar y descubrir cosas nuevas	
En mejorar mi capacidad para resolver problemas	
En hacer buen uso de las TIC's para profundizar e investigar con las diferentes plataformas educativas	
En seguir las indicaciones y sugerencias de la guía	
En hacer buen uso del tiempo para resolver las tareas	
En conectar los temas con la vida diaria	
TOTAL →	

2 | GEOMETRÍA

TEMA 8. SEGMENTOS PROPORCIONALES

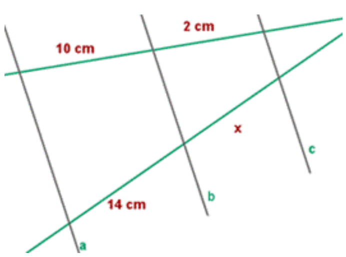
Definición:
Si dos rectas cualesquieras (r y s) se cortan por varias rectas paralelas (AA’, BB’, CC’) los segmentos determinados en una de las rectas (AB, BC) son proporcionales a los segmentos correspondientes en la otra (A’B’, B’C’).



$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{AC}{A'C'}$$

Ejemplo 1: Las rectas a, b y c son paralelas. Hallar la longitud de x.

Solución:

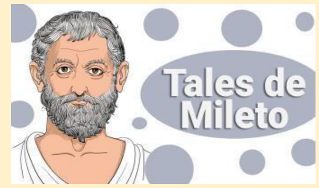


$$\frac{14}{10} = \frac{x}{2}$$

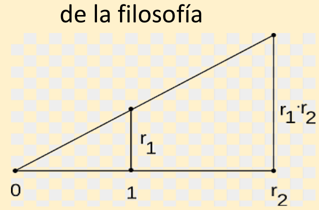
$$x = \frac{14 \cdot 2}{10} = 2{,}8\ cm$$

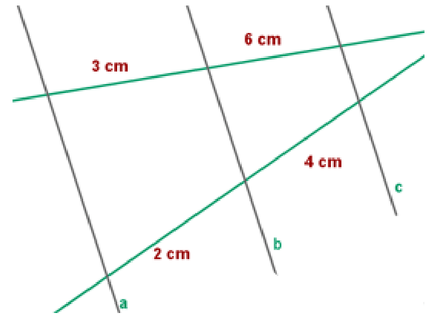
La longitud de $x = 2{,}8\ cm$

SABÍAS QUE...



- ✰ Thales de Mileto fue un filósofo y matemático griego.
- ✰ Nación en Turquía en 624 a.C. y murió en 548 a.C.
- ✰ En su juventud viajó a Egipto donde aprendió sobre geometría y astronomía.
- ✰ Dirigió en Mileto una escuela de Náutica, construyó un canal para desviar las aguas de Halis y daba consejos a políticos.
- ✰ Fue profesor de Pitágoras.
- ✰ Fue el primero en tratar de dar una explicación física del universo. Por eso se le conoce como el padre de la filosofía





Ejemplo 2: **¿**Las rectas a, b son paralelas? ¿Podemos afirmar que c es paralela a las rectas a y b?

Solución:

Sí, porque se cumple que los segmentos son proporcionales:

$$\frac{3}{2} = \frac{6}{4}$$

$$12 = 12$$

Note que: Como definición previa al enunciado del teorema de Thales, es necesario establecer que dos triángulos son **semejantes** si tienen los ángulos correspondientes iguales y sus lados son proporcionales entre sí.

ACTIVIDAD N° 8.

Traza con una regla dos rectas ***r*** y ***r'*** cualesquiera (que no sean paralelas) y realiza las siguientes actividades:

a) Traza tres puntos **A**, **B** y **C** sobre la recta **r** y que estén separados **2 cm** **A** y **B**, y **3 cm** **B** y **C**.

b) Traza tres rectas paralelas entre sí por los puntos **A**, **B** y **C**, y determina los puntos de corte correspondientes en la recta **r'**, **A'**, **B'** y **C'**.

c) Mide cuidadosamente los distintos segmentos que se forman y comprueba que se cumple el **teorema de Thales**.

d) Si trazaras un segmento de **6 cm** en la recta ***r*** y trazaras dos paralelas por sus extremos a las anteriores ¿cuánto mediría el segmento que se formaría en la recta ***r'*** ?

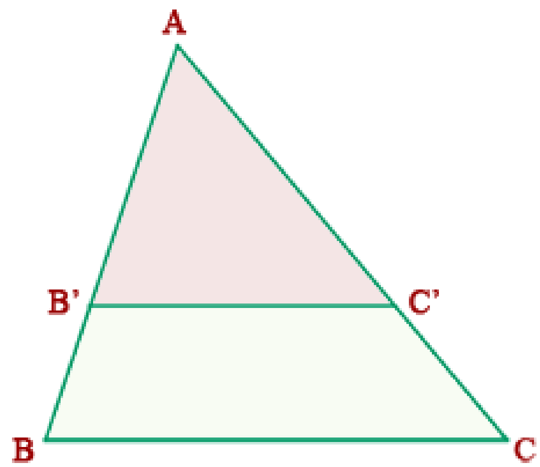
e) Realiza un informe con los resultados que has obtenido.

TEMA 9. PRIMER TEOREMA DE THALES

El primer teorema de Thales recoge uno de los postulados más básicos de la geometría, a saber, que:

"Si en un triángulo se traza una línea paralela a cualquiera de sus lados, se obtienen dos triángulos semejantes."

Entonces, veamos el primer Teorema de Tales en un triángulo**:**



Dado un triángulo ABC, si se traza un segmento paralelo, B'C', a uno de los lados del triángulo, se obtiene otro triángulo AB'C', cuyos **l**ado**s** son proporcionales a los del triángulo ABC.

Lo que se traduce en la fórmula

$$\frac{AB}{AB^{I}} = \frac{AC}{AC^{I}} = \frac{BC}{B^{I}C^{I}}$$

Ejemplo 3: En el triángulo, hallar las medidas de los segmentos **a** y **b.**

Solución:

Aplicamos la fórmula, y tenemos:

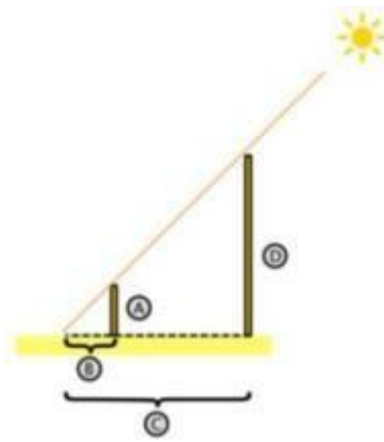
$$\frac{4}{2} = \frac{a}{4} \qquad a = 8\text{ cm}$$

$$\frac{4}{2} = \frac{6}{b} \qquad b = 3\text{ cm}$$

Como vemos, la principal aplicación del teorema, y la razón de su fama, se deriva del establecimiento de la condición de semejanza de triángulos, a raíz de la cual se obtiene el siguiente corolario.

- ## Principios de Proporcionalidad

Corolario



Al establecer la existencia de una relación de semejanza entre ambos triángulos se deduce la necesaria proporcionalidad entre sus lados. Ello significa que la razón entre la longitud de dos de ellos en un triángulo se mantiene constante en el otro.

Por ejemplo, en la figura se observan dos triángulos que, en virtud del Teorema de Tales, son semejantes. Entonces, como corolario, el cociente entre los lados A y B del triángulo pequeño es el mismo que el cociente entre los lados D y C en el triángulo grande.

En virtud del teorema de Tales, ambos triángulos son semejantes y se cumple que:

$$\frac{A}{B} = \frac{D}{C}$$

Este corolario es la base de la geometría descriptiva. Su utilidad es evidente; según **Heródoto**, el propio Tales empleó el corolario de su teorema para medir la altura de la pirámide de Keops en Egipto.

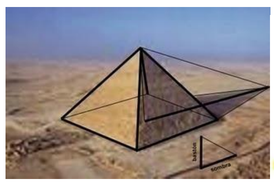
Revisa la siguiente dirección para que compruebes el Teorema de Thales:

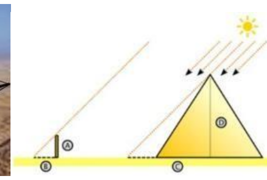
https://www.edu.xunta.gal/espazoAbalar/sites/espazoAbalar/files/datos/1491478128/contido/ud7_proporcionalidad_geometrica_y_teorema_Thales/21_problema_inicial.html

PARA SABER MÁS…

La leyenda de Tales y las pirámides

Según la leyenda (relatada por **Plutarco)**, Tales de Mileto en un viaje a Egipto, visitó las pirámides de Guiza (Keops, Kefrén y Micerinos), construidas varios siglos antes. Admirado ante tan portentosos monumentos, quiso saber su altura. La leyenda dice que solucionó el problema aprovechando la semejanza de triángulos (**y bajo la suposición de que los rayos solares incidentes eran paralelos**).





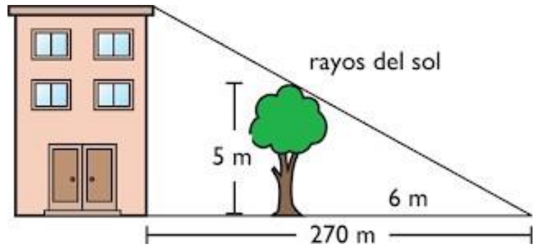
Así, estableció una relación de semejanza (Primer teorema de Tales) entre dos triángulos rectángulos, los que se grafican en la figura superior.
Por un lado, el que tiene por catetos (**C** y **D**) a la longitud de la sombra de la pirámide (C, conocible) y la longitud de su altura (D, desconocida), y por otro lado, valiéndose de una vara (**clavada en el suelo de modo perfectamente vertical**) otro cuyos catetos conocibles (**A** y **B**) son, la longitud de la vara (A) y la longitud de su sombra (B). Como en triángulos semejantes, se cumple que $\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$, por lo tanto, la altura de la pirámide es $D = \frac{AC}{B}$, con lo cual resolvió el problema.

- ### Aplicaciones del Primer Teorema de Tales

  El método de Tales tiene una enorme utilidad, puesto que lo podemos emplear para averiguar la altura de cualquier objeto que sea muy grande. Sirve para calcular alturas de edificios teniendo referencias de otros elementos que, sí que nos es fácil medir, como por ejemplo un árbol y ayudándonos en los rayos del sol, las proyecciones de sombra.

Ejemplo 4: Calcule la altura de un edificio.

Solución:



Escribimos la proporción:

$$\frac{6}{5} = \frac{270}{h}$$

(Siendo h la altura del edificio)

Y resolvemos la proporción:

$$6x = 270 * 5$$
$$x = \frac{1350}{6}$$
$$x = 225$$

Ejemplo 5: El siguiente esquema nos permite ver cómo Tales calculó la altura de la pirámide clavando su bastón en la arena.

Solución:

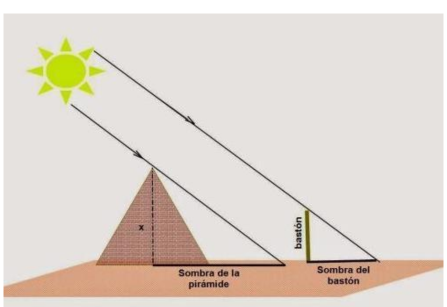
La sombra es la región donde no dan los rayos del sol. Se supone que los rayos que inciden en la pirámide y en el bastón son paralelos (consecuencia de la gran distancia que separa al Sol de la Tierra) y el bastón está clavado perpendicularmente al suelo.

De esta forma, los ángulos de los dos triángulos que observamos en la figura son iguales entre sí y, por tanto, dichos triángulos son semejantes. En dos triángulos semejantes, se cumple que **sus** lados homólogos son proporcionales.

En nuestro caso, se cumple que:

$$\frac{\textbf{Sombra de la pirámide}}{\textbf{Sombra del bastón}} = \frac{\textbf{Altura de la pirámide}}{\textbf{Altura del bastón}}$$

Supongamos ahora que, a una hora determinada del día, la sombra de la pirámide medía 280 metros, la sombra del bastón medía 2,87 metros y dicho bastón era de 1,5 metros.



Según lo que hemos visto antes, tendríamos que:

$$\frac{\mathbf{280m}}{\mathbf{2,87m}} = \frac{\textbf{Altura de la pirámide}}{\mathbf{1.5m}}$$

De donde obtenemos:

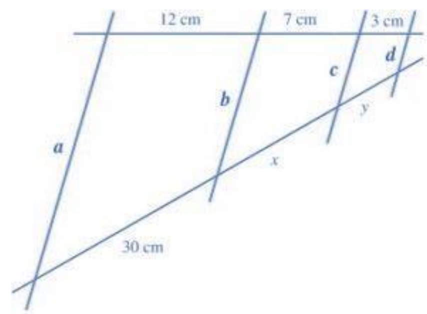
$$\textbf{Altura de la pirámide} = \frac{\mathbf{280m \cdot 1,5m}}{\mathbf{2,87m}}$$
$$= \mathbf{146,34m}$$

Que $\mathbf{146,34m}$ es el valor aproximado que tenía la pirámide de Keops en la antigüedad (actualmente $136{,}86\ m$).

Ejemplo 6: Calcula los valores de los segmentos que faltan:

Solución:

Observamos que faltan el segmento «x» y el segmento «y».



Aplicando la relación de Tales tenemos:

$$\frac{12\ cm}{30\ cm} = \frac{7\ cm}{x}$$

Despejamos al segmento «x».

$$x = \frac{7}{12\ cm}\ (\ 30\ cm)$$

$$x = \ 17{,}5\ cm$$

Ahora procedemos a calcular el segmento «y».

$$\frac{12\ cm}{30\ cm} = \frac{3\ cm}{y}$$

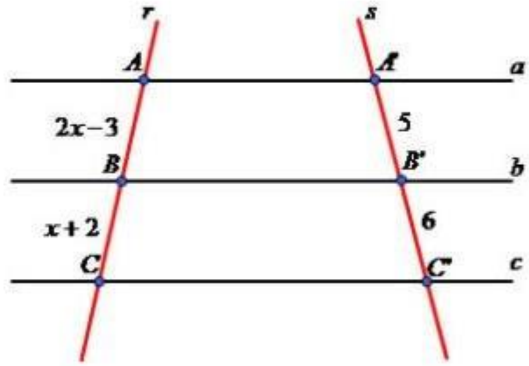
$$y = \frac{3}{12\ cm}\ (\ 30\ cm)$$

$$y\ =\ 7{,}5\ cm$$

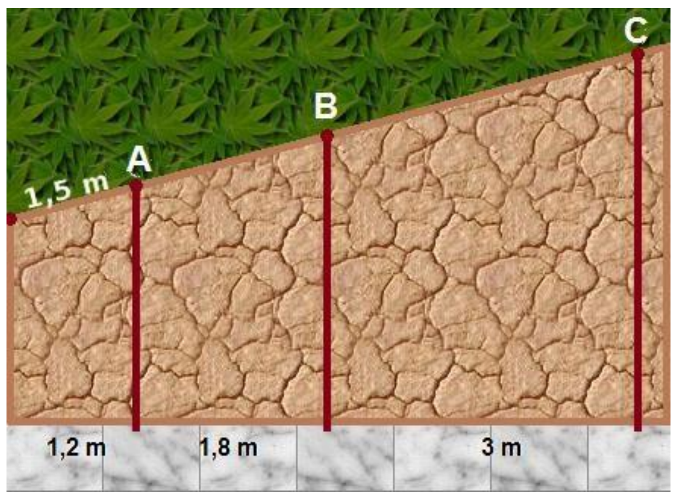
Por tanto, hemos encontrado los valores de x e y.

ACTIVIDAD N°9.1

1. Calcula el valor de los segmentos desconocidos. AB y BC.



2. En la imagen se muestra una pared en la que hemos trazado rectas perpendiculares a su base indicado la distancia entre ellas. En la parte superior hemos colocado los puntos ***A, B*** y ***C****.*



Pared-Thales. Imagen de Arturo Mandly en Flickr
Licencia Creative Commons by-nc-sa

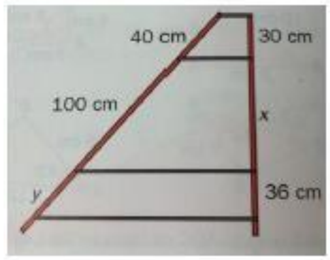
Ahora encierra la opción correcta:

2.1 ¿Qué distancia hay entre los puntos *A* y *B*?
a) 2m b) 2.5m c) 2.25m

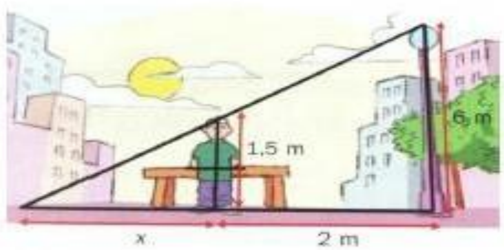
2.2 ¿Qué distancia hay entre los puntos *B* y *C*?
a) 4.5m b) 3.75m c) 4.25m

2.3 ¿Qué distancia hay entre los puntos A y C?
a) 600cm b) 550cm c) 625cm

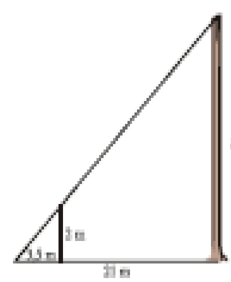
3. Los peldaños de esta escalera son paralelos y se ha roto uno de ellos. ¿Cuánto miden los tramos x e y?



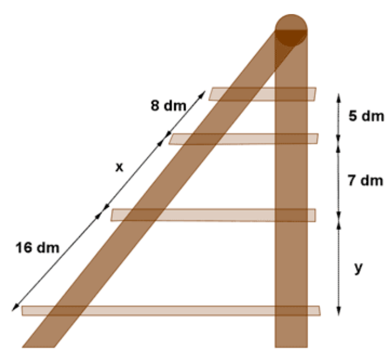
4. La estatura de un niño es de 1.5 metros y la altura de la farola es de 6 metros. Calcule la distancia x.



5. Calcula la altura de un poste que proyecta una sombra de 21 metros en el momento que una estaca de 2 metros proyecta una sombra de 3,5 metros.



6. Las tablas de una repisa representada en la figura son paralelos. Calcula las logitudes de la repisa representadas como x e y.

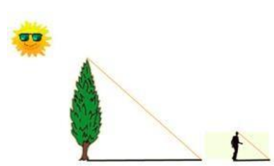


9.Aplica lo aprendido en casa. Busque objetos que sean similiares.
Mediante las siguientes actividades tratamos de llevar a la práctica los conocimientos teóricos adquiridos en la unidad didáctica de Proporcionalidad Geométrica, en la cual empezamos trabajando con el Teorema de Thales y semejanza de triángulos.
A través de estas actividades vamos a medir distancias inaccesibles de diferentes elementos que se encuentran en el patio del instituto. Para ello, se le propondrá al alumnado una serie de pasos a seguir y se les pedirá que anoten todos los resultados obtenidos con la finalidad de analizarlos posteriormente entre todos.

Laboratorio 1: Realiza con la ayuda de un familiar. Altura de un árbol

Para realizar esta actividad vamos a aprovechar la sombra creada por el sol.

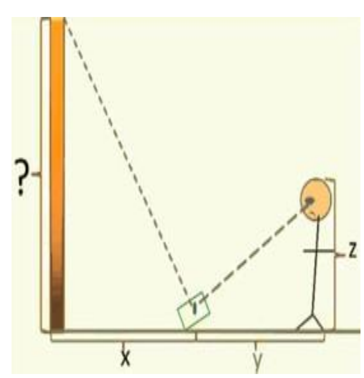
1. Uno de los alumnos debe situarse al lado del árbol, tanto el árbol como él crea una sombra.
2. Medimos la longitud de la sombra proyectada por el árbol.
3. Medimos la longitud de la sombra proyectada por el cuerpo del alumno y su altura.
4. Aplicamos Thales para calcular la altura del árbol.



¡Ahora solo queda analizar los resultados y ver si a todos nos dieron los mismos resultados!

Laboratorio 2: Realiza con la ayuda de un familiar. Altura de una canasta usando en espejo

1. Entre la canasta y el observador situamos un espejo (en el suelo), haciendo una marca en él.
2. Con el espejo situado en esta posición y mirando a través de él, el observador se aleja poco a poco hasta coincidir el aro de la canasta con la marca trazada en él.
3. Aplicamos Thales para calcular la altura de la canasta.



ACTIVIDAD N°9.2

I- Proporcionalidad geométrica, semejanza y tecnología. Utilizando el software GeoGebra construya e investigue:

1) Construya una recta. Denótela con a. Construya tres paralelas a la recta a. Denótelas con b, c y d.
2) Construya dos rectas transversales a las cuatro paralelas. Denótelas con r y s.
3) Construya los puntos de intersección de la recta r con las rectas paralelas.
4) Construya los puntos de intersección de la recta s con las rectas paralelas.
5) Denote los puntos de intersección de las rectas r y s con las rectas a, b, c y d con A, A', B, B', C, C', D y D', respectivamente.

II- Considere como hipótesis las relaciones que se dan en la construcción anterior y descubra alguna implicación de las mismas.

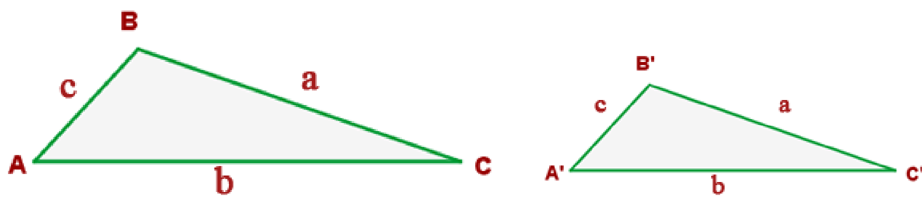
6) Utilizando el comando COMENTARIOS (TEXTO) escriba en la parte superior izquierda de la ventana de dibujo:
   AB =
   BC =
   CD =
   A'B' =
   B'C' =
   C'D' =
7) Calcule las longitudes de los segmentos AB, BC, CD, A'B', B'C', C'D'. Mueva estas medidas al lado de las etiquetas respectivas.
8) Utilizando COMENTARIOS escriba en la parte superior derecha de la ventana de dibujo:
   AB/BC =
   A'B'/B'C' =
   BC/CD =
   B'C'/C'D' =
9) Calcule las parejas de razones siguientes: AB/BC y A'B'/B'C'; BC/CD y B'C'/C'D'.
10) Muévalas al lado de las etiquetas respectivas.
11) Compare las parejas de razones. ¿Qué observa usted?, ¿Son iguales las razones?
12) Explore moviendo la recta s o la recta r. ¿Qué observa usted?, ¿Son iguales las razones?
13) Explore moviendo la recta a. ¿Qué observa usted?, ¿Son iguales las razones para cada sistema de paralelas?
14) Formule una conjetura.

Obtenido de: Héctor Osorio A. Departamento de Matemática – Universidad Autónoma de Chiriquí - Panamá

TEMA 10. SEMEJANZA DE TRIÁNGULOS

Uno de los conceptos geométricos que suele crear cierta confusión es el de "semejanza". Posiblemente, dicha confusión se deba a que en el lenguaje cotidiano utilizamos el término "*semejante*" como sinónimo de "*parecido*". Pero, parecido ¿en qué?, ¿en tamaño?, ¿en forma?...
En matemáticas "dos figuras son semejantes cuando tienen la misma forma, pero distinto tamaño".

Dos triángulos se dicen ser semejantes si tienen la misma forma, aunque no necesariamente igual tamaño. Los lados homólogos de dos triángulos semejantes son aquellos que son adyacentes a cada uno de los ángulos congruentes, es decir son los lados correspondientes.



$$\angle A = \angle A' , \quad \angle B = \angle B', \quad \angle C = \angle C'$$

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$$

Los lados homólogos de los triángulos de la figura son: a y a'; b y b'; c y c' respectivamente. Los ángulos homólogos son: $\angle A$ y $\angle A'$; $\angle B$ y $\angle B'$; $\angle C$ y $\angle C'$ respectivamente.

Simbólicamente en matemáticas indicamos de la siguiente manera que dos triángulos son semejantes:

$$\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$$

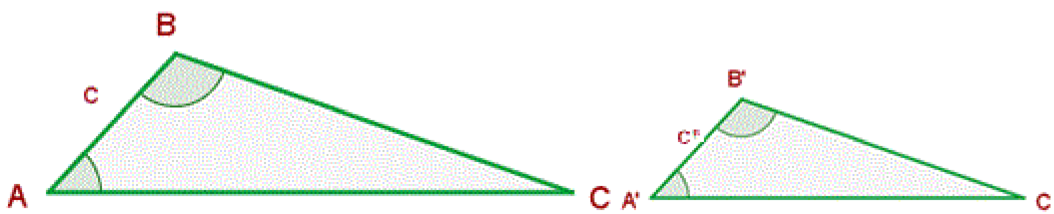
Que se lee: El triángulo ABC es semejante al triángulo $A'B'C'$.

Para los triángulos tenemos los siguientes criterios que nos ayudan a determinar cuando éstos son semejantes:

Propiedades fundamentales

1. Criterio Angulo-Ángulo-Ángulo (AAA)

Dos triángulos son semejantes si sus ángulos correspondientes son iguales:



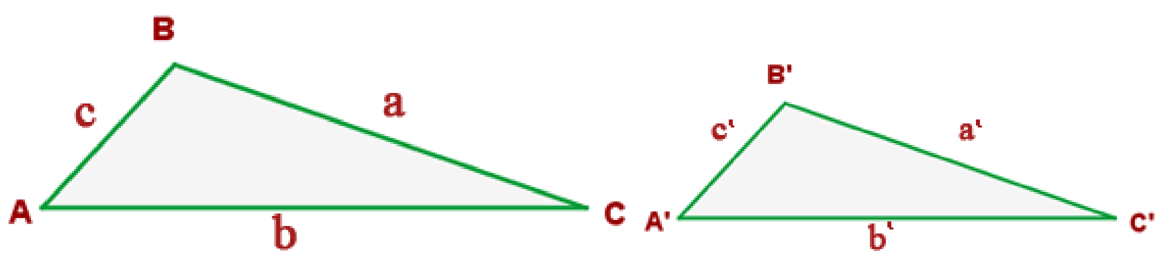
$$\angle A = \angle A'$$

$$\angle B = \angle B'$$

Si $\angle A = \angle A' \; y \; \angle B = \angle B' \Rightarrow \Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$

2. Criterio Lado-Lado-Lado (LLL)

Dos triángulos son semejantes si la razón de sus lados correspondientes es constante. Dicho de otra forma, sus lados correspondientes son respectivamente proporcionales.

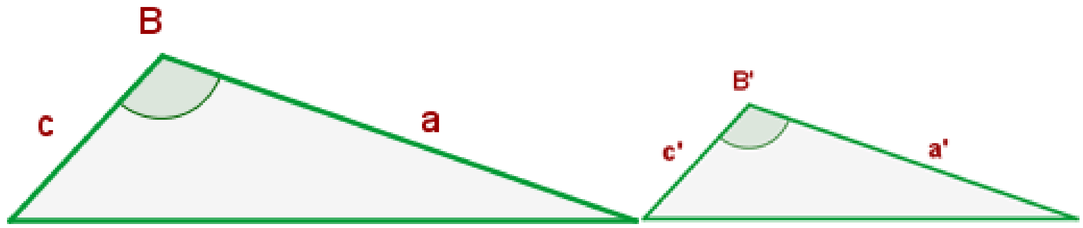


$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$$

Si $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} \Rightarrow \; \Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$

3. Criterio Lado-Ángulo-Lado (LAL)

Dos triángulos son semejantes si tienen dos lados proporcionales y el ángulo comprendido entre ellos es igual.

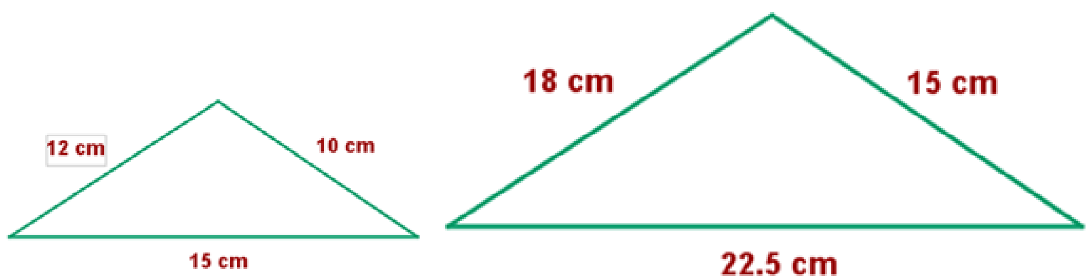


$$\angle B = \angle B'$$
$$\frac{a}{a'} = \frac{c}{c'}$$

$$\text{Si } \angle B = \angle B' \text{ y } \frac{a}{a'} = \frac{c}{c'} \Rightarrow \Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$$

EJEMPLOS

1. Razona si son semejantes los siguientes triángulos:



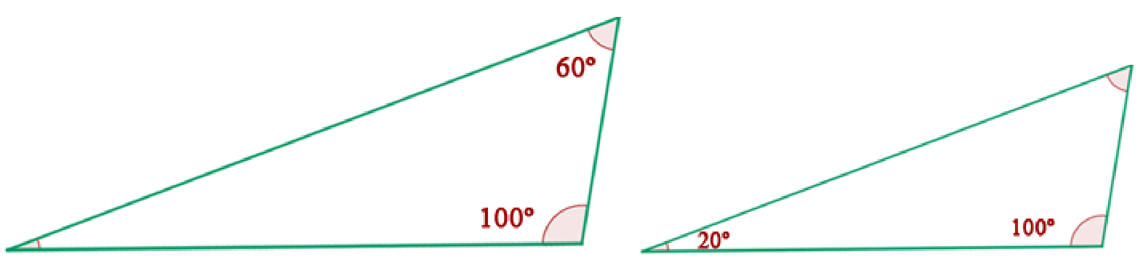
Solución:

$$\frac{12}{18} = \frac{10}{15} = \frac{15}{22,5}$$

$$0.667 = 0,667 = 0,667$$

Son **semejantes** porque tienen sus 3 **lados proporcionales**.

2. Analice si los siguientes triángulos son semejantes:

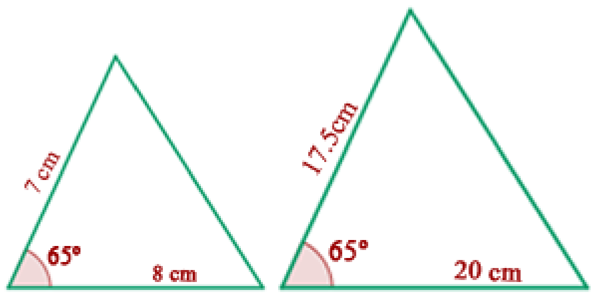


Solución:

$$180° - 100° - 60° = 20°$$

Son **semejantes** porque tienen **dos ángulos iguales**.

3. Analice si los siguientes triángulos son semejantes:



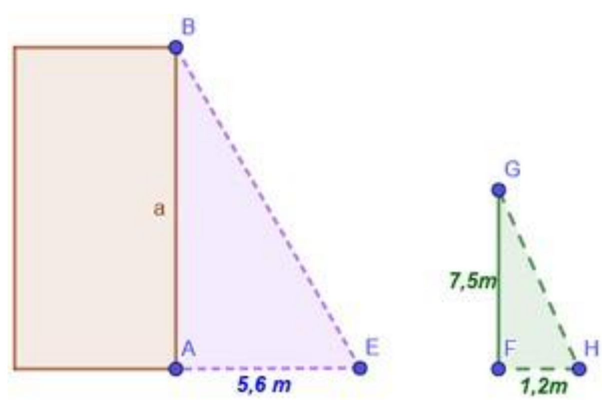
Solución:

$$\frac{7}{17,5} = \frac{8}{20} \; y \; 65° = 65°$$

$$0,4 = 0,4 \; y \; 65° = 65°$$

Son **semejantes** porque tienen **dos lados proporcionales** y **un ángulo igual**.

4. Calcular la altura de un edificio que proyecta una sombra de 5,6 m en el mismo instante que un poste de 7,5m proyecta una sombra de 1,2 m.



$\Delta ABE \sim \Delta FGH$ entonces:

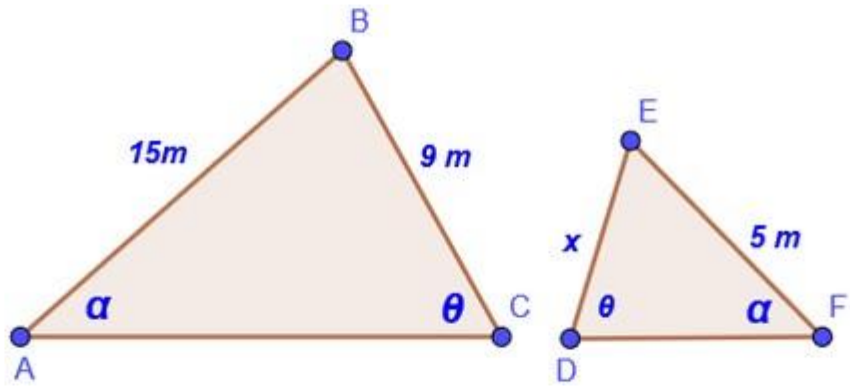
$$\frac{a}{7,5} = \frac{5,6}{1,2}$$

$$1,2\text{a} = 7,5 \cdot 5,6$$

$$a = \frac{42}{1{,}2}$$

$$a = 35\ metros$$

5. Determine si los triángulos de la imagen son semejantes (justifique su respuesta). Si hay semejanza determinar el valor de x.



Los triángulos son semejantes ya que tienen dos ángulos homólogos, además los lados opuestos al ángulo Ɵ (correspondientes) son proporcionales. AB es proporcional a EF porque se oponen a Ɵ y BC es correspondiente a DE por oponerse al ángulo α

$$\frac{15}{5} = \frac{9}{\mathrm{x}}$$

$$15 \cdot \mathrm{x} = 5 \cdot 9$$

$$\mathrm{x} = \frac{45}{15}$$

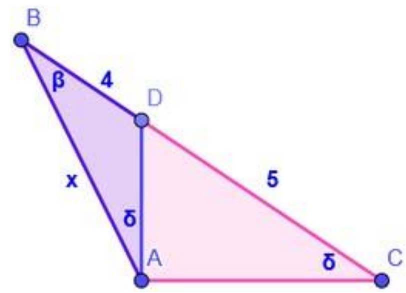
$$\mathrm{x} = 3$$

El valor del lado DE es 3 metros.

ACTIVIDAD N° 10.

Resuelva cada uno de los siguientes ejercicios tomando en cuenta los criterios de semejanza de triángulos.

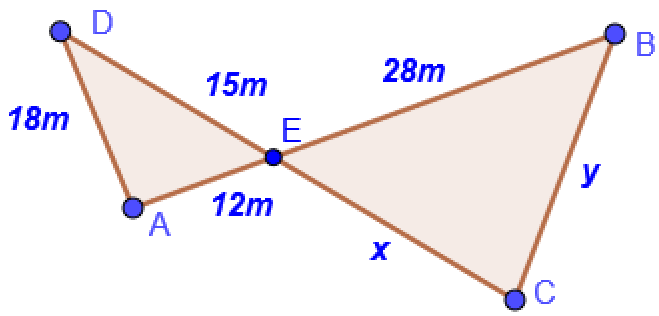
1. En la figura, calcular el valor de AB.



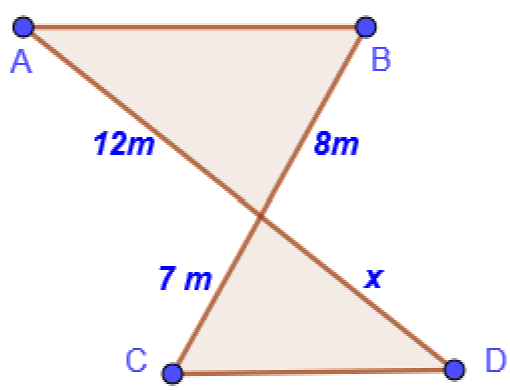
2. El poste de un semáforo peatonal de 2m de altura proyecta una sombra, a la misma hora en que un edificio proyecta una sombra de 80 m. Hallar la altura del edificio.

3. Los lados de un triángulo miden 24 m., 18m. y 36 m., respectivamente. Si los lados de otro triángulo miden 12m., 16 m. y 24 m., respectivamente. Determina si son o no semejantes, justificando tu respuesta.

4. Con los datos de la figura, obtener los valores de los lados EC y BC.



5. En la figura AB y CD son paralelas. Determine el valor de x.



La semejanza en la vida cotidiana

Veamos algunos ejemplos de la vida cotidiana en los que utilizamos el concepto de semejanza:

- Una fotografía de tamaño 10x15 cm y su ampliación a tamaño 40x60 cm. son semejantes y guardan la misma proporción tanto a lo ancho como a lo largo.

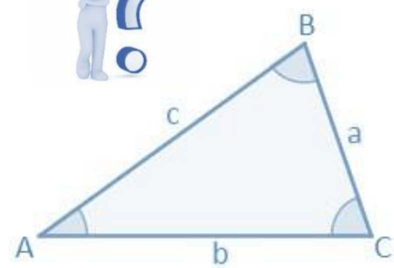
- Un topógrafo desea determinar la distancia entre dos ciudades, para lo que utiliza un mapa. La escala utilizada es de 1:300000, es decir, un centímetro en el mapa representa 300000 cm = 3 km en la realidad.

- La construcción de planos o maquetas a escala para edificios, aviones, barcos... requiere de una buena aplicación de los conceptos de semejanza y proporcionalidad, es decir, el tamaño de cada una de sus partes debe estar acorde con el tamaño que el objeto tiene en la realidad.

3 | TRIGONOMETRÍA

TEMA N°11. RAZONES TRIGONOMÉTRICAS

¿Qué es la trigonometría?



La trigonometría es la rama de las matemáticas que estudia la relación entre los lados y ángulos de los triángulos. Etimológicamente, trigonometría significa “medida de los triángulos”, ya que proviene de las palabras griegas trígono (triángulo) y metron (medida).
La trigonometría se ocupa de las funciones asociadas a los ángulos, denominadas funciones trigonométricas: seno, coseno, tangente, secante, cosecante y cotangente. Tiene innumerables aplicaciones en diversos campos de la ingeniería y la ciencia: de una u otra manera en todos los campos de las **matemáticas**; en la **física**, por ejemplo, en fenómenos ondulatorios; en la **astronomía**, para medir distancias entre planetas; en la **geodesia**, en ingeniería civil para la construcción de puentes y túneles, entre otros.

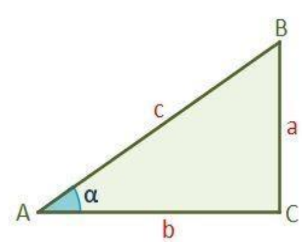
La función principal de la trigonometría es que nos permite conocer cuánto miden los ángulos internos de un triángulo con tan solo conocer las longitudes de dos lados del triángulo, o bien conocer cuánto miden los lados y ángulos de un triángulo solamente conociendo cuánto miden un ángulo y un lado del mismo.

En trigonometría se trabaja con triángulos rectángulos en los que un ángulo es recto de 90° y los otros tienen que sumar entre los dos 90° (para cumplir con la ley de los 180°).
TEOREMA: La suma de las medidas de los tres ángulos internos de cualquier triangulo es 180°. $\measuredangle A + \measuredangle B + \measuredangle C = 180°$

- ### Las razones trigonométricas

Las razones trigonométricas de un ángulo *α son las razones obtenidas entre los tres lados de un triángulo rectángulo.*

Triangulo Rectángulo: es el triángulo que tiene un ángulo recto o de 90°.



Sea α (alfa) uno de los ángulos agudos del triángulo **rectángulo**,

- El **seno** de un ángulo α se define como la razón entre el cateto opuesto (a) y la hipotenusa (c).

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{\textit{cateto opuesto}}{\textit{hipotenusa}} = \frac{a}{c}$$

- El **coseno** de un ángulo α se define como la razón entre el cateto contiguo o cateto adyacente (b) y la hipotenusa (c).

$$\cos\alpha = \frac{\textit{cateto contiguo}}{\textit{hipotenusa}} = \frac{b}{c}$$

- La **tangente** de un **ángulo** α es la **razón** entre el cateto opuesto (a) y el cateto contiguo o cateto adyacente (b).

$$\tan\alpha = \frac{\textit{cateto opuesto}}{\textit{cateto contiguo}} = \frac{a}{b}$$

- La **cosecante** de α, se define como la razón entre la hipotenusa (c) y el cateto opuesto (a).

$$\csc\alpha = \frac{1}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{\textit{hipotenusa}}{\textit{cateto opuesto}} = \frac{c}{a}$$

- La **secante** de α. Se define como la razón entre la hipotenusa (c) y el cateto contiguo o cateto adyacente (b).

$$\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha} = \frac{\textit{hipotenusa}}{\textit{cateto contiguo}} = \frac{c}{b}$$

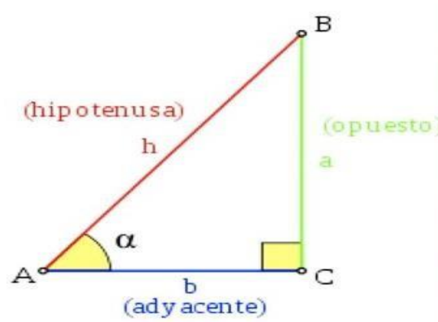
- La **cotangente** de α. se define como la razón entre el cateto contiguo o cateto adyacente (b) y el cateto opuesto (a).

$$\cot\alpha = \frac{1}{\tan\alpha} = \frac{\textit{cateto contiguo}}{\textit{cateto opuesto}} = \frac{b}{a}$$

$$\sin\alpha = \frac{\text{opuesto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{a}{h}.$$

$$\cos\alpha = \frac{\text{adyacente}}{\text{hipotenusa}} = \frac{b}{h}.$$

$$\tan\alpha = \frac{\text{opuesto}}{\text{adyacente}} = \frac{a}{b}$$

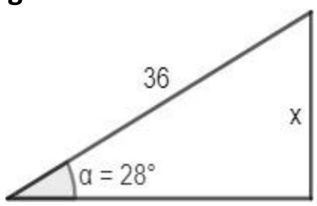


Puedes usar la palabra SOCATOA para recordar las funciones trigonométricas.

$$S\frac{o}{h}C\frac{a}{h}T\frac{o}{a}$$

Ejemplos:
Calcular el valor de x de cada figura utilizando las razones trigonométricas:

Figura 1



Solución:
Conocemos la hipotenusa y el ángulo. Como queremos calcular el lado opuesto, utilizamos el **seno**:

$$\sin \alpha = \frac{opuesto}{hipotenusa}$$

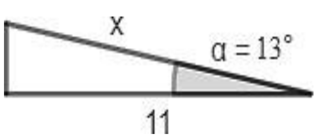
$$\sin(28)° = \frac{x}{36}$$

$$x = 36 \cdot \sin 28$$

$$x = 16\ 900$$

Respuesta: El lado mide, aproximadamente, 16 900.

Figura 2:



Solución:
En esta figura conocemos el lado contiguo y el ángulo.
Para calcular la hipotenusa, utilizamos el **coseno**:

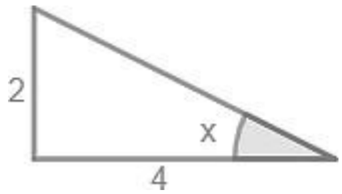
$$\cos \alpha = \frac{adyacente}{hipotenusa}$$

$$\cos 13° = \frac{11}{x}$$

$$x = \frac{11}{cos 13°} = 11\ 289$$

Respuesta: La hipotenusa(x) mide aproximadamente 11 289.

Figura 3



Solución: Como conocemos el lado opuesto y el contiguo al ángulo, utilizamos la tangente:

$$\tan\alpha = \frac{opuesto}{adyacente}$$

$$\tan x = \frac{2}{4} = 0.5$$

$$x = \tan^{-1}(0.5) = 26.565°$$

Respuesta: El ángulo mide, aproximadamente, 26.565°.

• Resolución de triángulos rectángulos

Resolver un triángulo consiste en calcular seis elementos: los tres lados y los tres ángulos. Para ello necesitamos conocer tres de estos seis elementos y uno de los datos por lo menos sea un lado. Como el triángulo es rectángulo (un ángulo es 90º) basta conocer dos de sus elementos, uno de los cuales debe ser un lado.
Si conocemos dos lados del triángulo, podemos calcular el otro aplicando el teorema de Pitágoras.

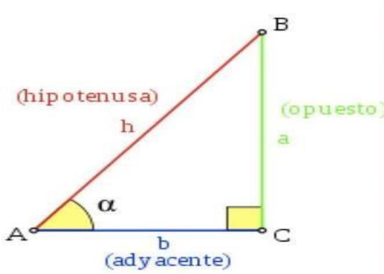
El teorema de Pitágoras: $\boldsymbol{c^2 = a^2 + b^2}$

Sin embargo, en ocasiones no conocemos dos lados, pero sí conocemos uno de los otros dos ángulos no rectos. En estos casos es cuando utilizamos el seno y el coseno.

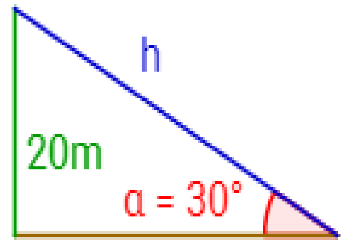
$$\sin\alpha = \frac{\text{opuesto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{a}{h}.$$

$$\cos\alpha = \frac{\text{adyacente}}{\text{hipotenusa}} = \frac{b}{h}.$$

$$\tan\alpha = \frac{\text{opuesto}}{\text{adyacente}} = \frac{a}{b}$$



Ejemplos:



Problema 1: Se desea sujetar un poste de 20 metros de altura con un cable que parte de la parte superior del mismo hasta el suelo de modo que forme un ángulo de 30º. Calcular el precio del cable si cada metro cuesta B/.12,00

Solución: Como conocemos el ángulo α y el lado opuesto a dicho ángulo, utilizamos el seno para calcular la hipotenusa del triángulo:

$$\sin\alpha = \frac{c.\,opuesto}{hipotenusa}$$

$$\sin 30° = \frac{20\,m}{h}$$

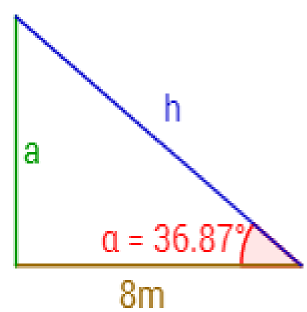
$$h = \frac{20\,m}{\sin 30°}$$

$$h = \frac{20\,m}{\sin 30°}$$

$$h = 40\,m$$

$$(40)(B/.12{,}00) = B/.480{,}00$$

Respuesta: El cable debe medir 40 metros y su precio es de $B/.480{,}00$



Problema 2: Calcular la altura **a**, de un árbol sabiendo que, si nos situamos 8 metros de la base del tronco, vemos la parte superior de su copa en un ángulo de 36.87º.

Como la altura **a** es el cateto opuesto al ángulo, utilizaremos el seno:

$$\boxed{\begin{array}{l}\sin(\alpha) = \dfrac{a}{h} \rightarrow \\ a = h \cdot \sin(\alpha)\end{array}} \qquad \cos(\alpha) = \frac{b}{h}$$

Pero como necesitamos calcular la hipotenusa h del triángulo, utilizamos el coseno:

Sustituimos los datos:

$$\cos(36{,}87°) = \frac{8}{h}$$

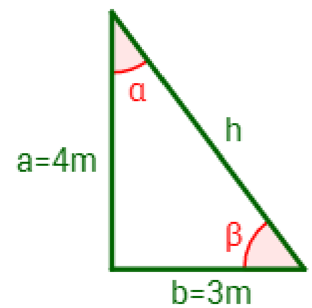
$$\boldsymbol{h} = \frac{\mathbf{8}}{\mathbf{cos(36{,}87°)}} = \frac{\mathbf{8}}{\mathbf{0.799}} = \mathbf{10{,}01}$$

Por tanto, la altura del árbol es:

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{h} \cdot \mathbf{sin}(a) = \mathbf{10{,}01} = \mathbf{sin(36,87°)} = \mathbf{10.01 \cdot 0,6} = \mathbf{6,006}\ \boldsymbol{m}.$$

Respuesta: La altura del árbol es 6,006 m.

Problema 3: Del siguiente triángulo rectángulo se conocen sus dos catetos: uno mide 4m y el otro mide 3m. Calcular la hipotenusa y los ángulos α y β.



Como el triángulo es rectángulo, aplicamos el teorema de Pitágoras para calcular la hipotenusa: $\boldsymbol{h^2} = \boldsymbol{a^2} + \boldsymbol{b^2}$

$$\boldsymbol{h} = \sqrt{\boldsymbol{a^2} + \boldsymbol{b^2}} =$$

$$= \sqrt{\mathbf{4^2} + \mathbf{3^2}} =$$

$$= \sqrt{\mathbf{25}} = \mathbf{5}\boldsymbol{m}$$

Respuesta: La hipotenusa mide 5 metros.

Para calcular los ángulos podemos utilizar, por ejemplo, el seno:

$$\mathbf{sin}(\boldsymbol{\alpha}) = \frac{\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{h}}$$

$$\mathbf{sin}(\boldsymbol{\beta}) = \frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{h}}$$

Como conocemos los catetos y la hipotenusa, podemos calcular el seno de los ángulos:

$$\mathbf{sin}(\boldsymbol{\alpha}) = \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{5}} = \mathbf{0,6}$$

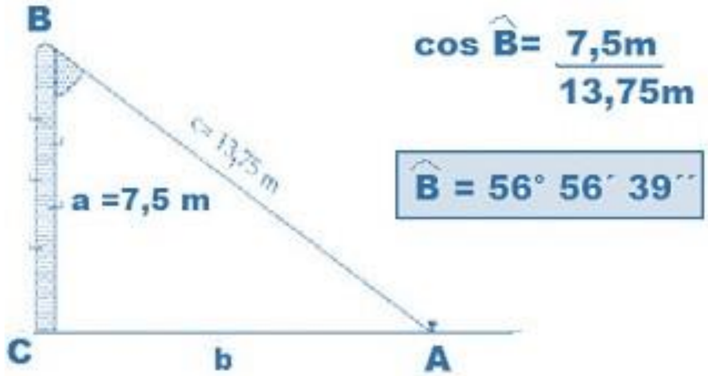
$$\mathbf{sin}(\boldsymbol{\beta}) = \frac{\mathbf{4}}{\mathbf{5}} = \mathbf{0,8}$$

Finalmente, para calcular los ángulos sólo debemos utilizar la función arcoseno:

$$a = \mathbf{sin^{-1}\,0,6} = \mathbf{36,869}$$

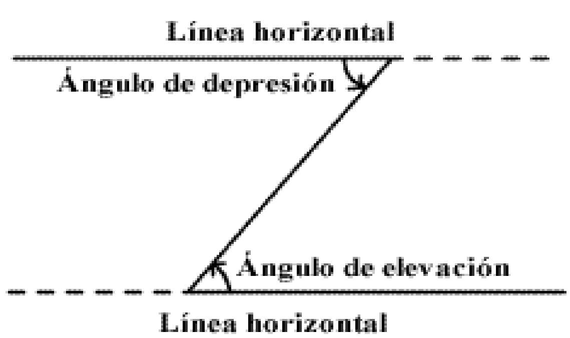
$$\mathrm{Q} = \mathbf{sin^{-1}\,0,8} = \mathbf{53,13°}$$

Problema 4: Obtener el ángulo que forma un poste de 7,5 m de alto con un cable tirante que va, desde la punta del primero, hasta el piso, y que tiene un largo de 13,75 m.



- ## Ángulos de elevación y de depresión

Los ángulos verticales son aquellos que están ubicados en un plano vertical, y están **formados por una línea visual y una línea horizontal**. Estos ángulos pueden ser de 2 tipos: **ángulos de elevación y ángulos de depresión.**
En la siguiente imagen podemos apreciar **en qué consisten los ángulos de elevación y depresión**:



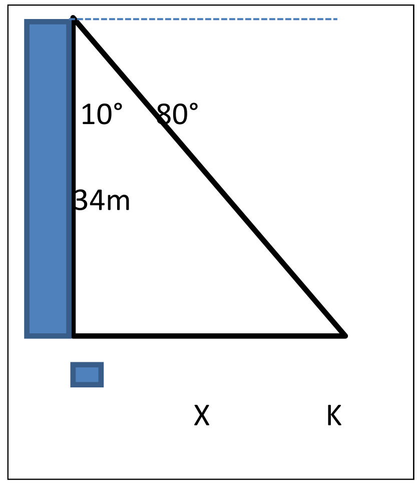
El ángulo de elevación y el ángulo de depresión son congruentes.

> Sea α y β dos ángulos, éstos serán ángulos congruentes si tienen exactamente la misma medida, es decir, $\alpha = \beta$.

Ejemplo 1. La medida del ángulo de depresión desde lo alto de una torre de 34 m de altura hasta un punto K en el suelo es de 80° . Calcule la distancia aproximada del punto K a la base de la torre.

Solución:

a) Se dibuja una figura representativa de la situación.



b) Se plantea la razón trigonométrica tangente del ángulo que mide 10° para encontrar el valor de x.

$$\tan\theta = \frac{c.o.}{c.a.}$$

$$\tan 10^\circ = \frac{x}{34}$$

$$34 \cdot \tan 10^\circ = x$$

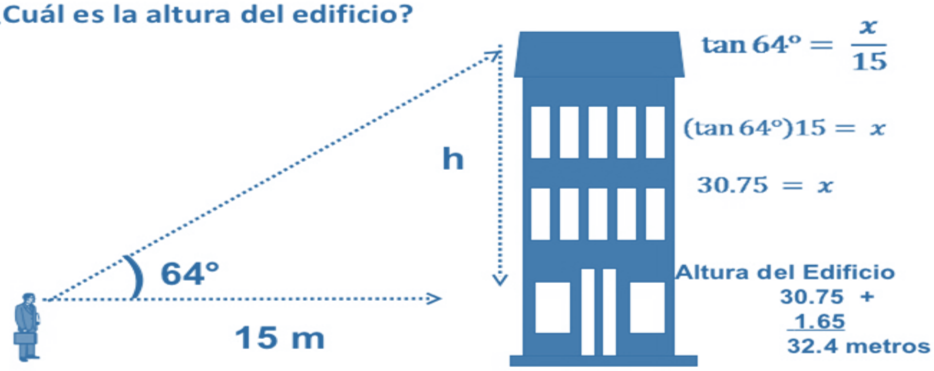
$$x = 6$$

c) Se da respuesta al problema planteado: La distancia aproximada desde el punto K a la base de la torre es de 6m.

Ejemplo 2.

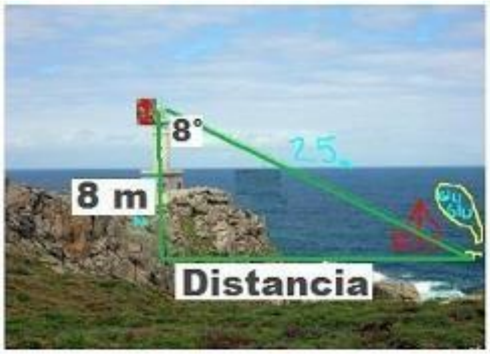
Un observador, cuya estatura es de 1.65 metros se aleja 15 metros de la base de un edificio y desde esta posición dirige la vista al punto mas alto de la fachada de dicho edificio. Si el dicho edificio. Si el ángulo de elevación es de 64°

¿Cuál es la altura del edificio?



Ejemplo 3.

De la cima de un faro de 8 m de alto se divisa una lancha con un ángulo de depresión de 8° calcula la distancia entre la lancha y el pie del faro.



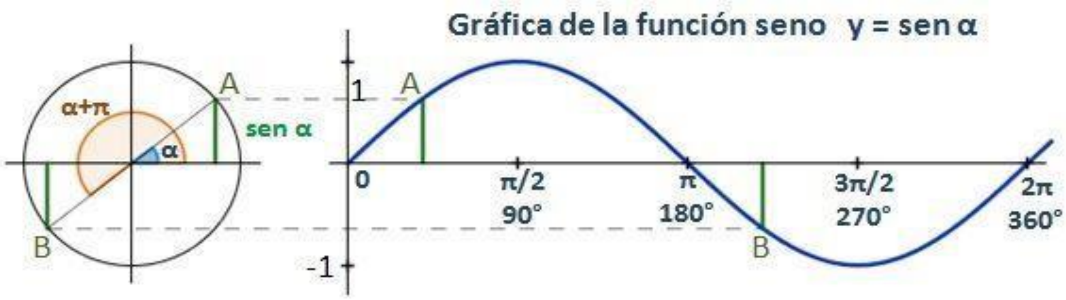
$$\text{tg } 8° = \frac{D}{8 \text{ m}}$$

$$\text{tg } 8° \cdot 8 \text{ m} = D$$

$$\boxed{D = 1{,}12 \text{ m}}$$

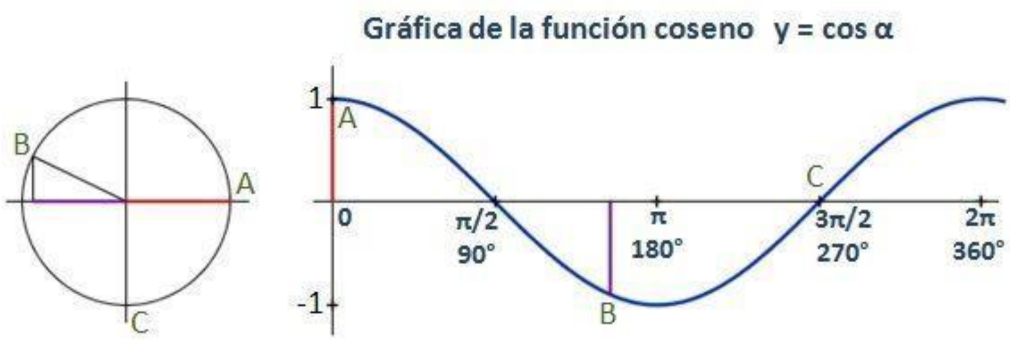
- *Gráficas de las funciones trigonométricas*

- LA **GRÁFICA** DE LA FUNCIÓN SENO ES:



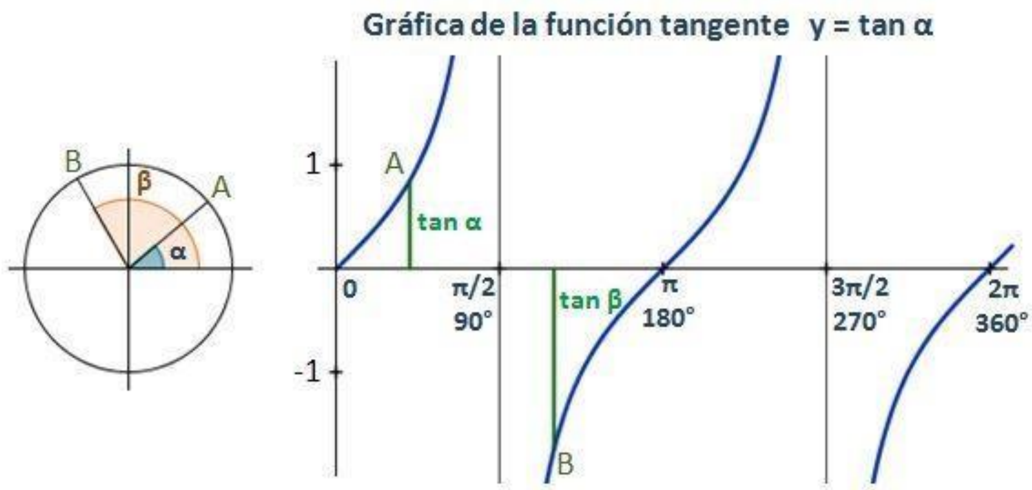
La función del **seno** es **periódica** de período 360º (2π radianes)

- LA **GRÁFICA** DE LA FUNCIÓN COSENO ES:



La función del **coseno** es **periódica** de período 360º (2π radianes).

- LA **GRÁFICA** DE LA FUNCIÓN TANGENTE ES:

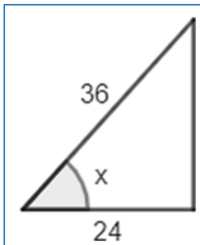
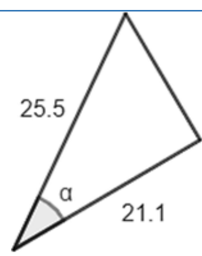
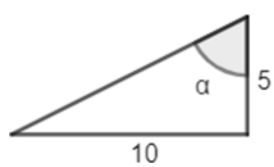
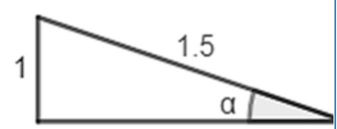


ACTIVIDAD N° 11.1

<u>Indicaciones</u>:

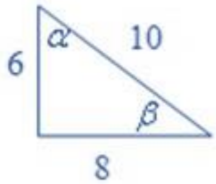
- ✓ *Realice los ejercicios propuestos aplicando las razones trigonométricas.*
- ✓ *Resuelva en forma clara y ordenada.*

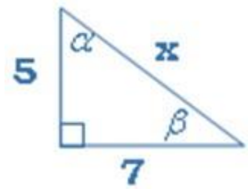
1. Calcule el valor de **x** o de α, según se indique en cada figura, utilizando las razones trigonométricas:

2. En los siguientes triángulos rectángulos, determina el valor de las 6 razones trigonométricas para el ángulo agudo β.

El teorema de Pitágoras: $c^2 = a^2 + b^2$



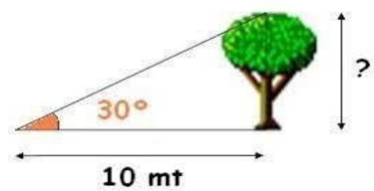


ACTIVIDAD N° 11.2

Indicaciones:

- ✓ *Realiza los ejercicios propuestos aplicando las funciones trigonométricas.*
- ✓ *Resuelve en forma clara y ordenada.*
- ✓ *De la respuesta en forma de oración.*

1. Determina la altura del árbol, sabiendo que su sombra mide 10 m, cuando el ángulo de elevación del sol es de 30°.

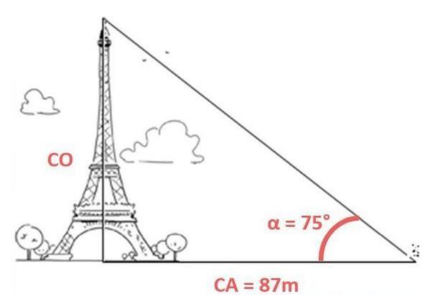


2. Un árbol proyecta una sombra de 17 m de longitud. Desde el punto del terreno donde termina la sombra, el ángulo de elevación (formado por la horizontal y la visual dirigida a un objeto, cundo éste está sobre la horizontal) del extremo superior del árbol es de 52°. ¿Cuál es la altura del árbol? Haga el dibujo.

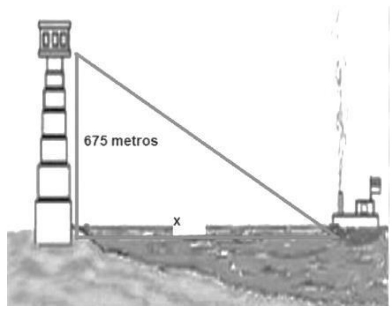
3. Encuentra la altura H de un árbol si se sabe que la longitud de su sombra es de 120 cm. Además, el ángulo que forman los rayos del sol con la horizontal es de 45º. Dibuje el triángulo rectángulo.

4. Marcos mide 1.72 metros de estatura y su sombra 1.54 metros de longitud, ¿Qué ángulo forman en ese instante los rayos del sol con la horizontal? Dibuje el triángulo rectángulo.

5. Observa la figura y determina la altura de la torre.

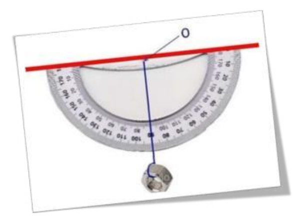


6. Un faro está ubicado sobre la playa. El faro tiene una altura de 675 metyros. Desde lo alto del faro y en un ángulo de depresión de 76° se divisa una embarcación. ¿A qué distancia de la base del faro se encuentra la embarcación?



ACTIVIDAD N° 11.3

CONSTRUCCIÓN Y USO DE UN GONIÓMETRO CASERO



Objetivo: Calcular alturas de edificios o cualquier elemento de difícil medición o directamente inaccesible.

Primera fase: Construya el teodolito casero o goniómetro.
Segundo fase: Mida un edificio o monumento de su comunidad.

- Elegir dos edificios u otros elementos de altura dentro de tu comunidad.
- Realizar las mediciones de longitudes y de ángulos y anotar los datos.

Después de escoger el edificio, mida una distancia desde ese objeto hasta el observador, luego el observador mira por el goniómetro la punta más alta del edificio u objeto escogido y mide el ángulo de inclinación, luego mide la altura del observador hasta su visión y llena la tabla con los datos recogidos. Después de obtener todos los datos y realizar los cálculos necesarios para obtener la altura total del edificio, se puede realizar varias veces todo el proceso y calcular el promedio de todos los datos.

- Documente las mediciones y describa dicho proceso.

Tercera fase: Realice los cálculos e indique las alturas de los edificios medidos.

- Vea videos en YouTube sobre el uso del goniómetro y el cálculo de alturas aplicando la trigonometría.
- Investige la historia de alguno de los edificios o monumentos medidos.
- Complete: la tabla de datos y resultados.
- Escriba sus conclusiones y reflexiones sobre lo aprendido en esta actividad.

TABLA DE DATOS Y RESULTADOS

Edificio	Distancia del observador al edificio, en metros. (**d**)	Ángulo de inclinación (α)	Ángulo de elevación ($\theta = 90° - \alpha$)	Altura del observador (**h_1**)	Altura calculada (**h_2**)	Altura total del edificio (**h_T**)
	d=	α**=**	$\theta = 90° - \alpha$ $\theta =$	$h_1 =$	$\tan\theta = \frac{h_2}{d}$ $h_2 = d \cdot \tan\theta$ $h_2 =$	$h_T = h_1 + h_2$ $h_T =$
	d=	α**=**	$\theta = 90° - \alpha$ $\theta =$	$h_1 =$	$\tan\theta = \frac{h_2}{d}$ $h_2 = d \cdot \tan\theta$ $h_2 =$	$h_T = h_1 + h_2$ $h_T =$

CONCLUSIONES Y RFEFLEXIONES

ACTIVIDAD N° 11.4

<u>Indicaciones</u>: Construya una gráfica de $y = sen\ \theta$, para valores: $0° \leq \theta \leqq 360°$ cada $30°$.

a) Tabla de valores (redondea hasta las centésimas)

X	θ	$0°$	$30°$	$60°$	$90°$	$120°$	$150°$	$180°$	$210°$	$240°$	$270°$	$300°$	$330°$	$360°$
Y	$sen\ \theta$													

b) Gráfica de $y = sen\ \theta$

4 | ESTADÍSTICA

TEMA 12. ESTADÍSTICA DESCRIPTIVA

- ### Objetivos de la estadística

La estadística es una ciencia, que ayuda al individuo a tomar decisiones. Parte de una problemática a la que aspiramos dar respuesta. Puede conectarse con actividades que se apliquen en el área científica, en el área humanística y en el área tecnológica, en el comercio, la industria, la salud, entre otros.

En el siguiente gráfico hemos resumido los componentes que desarrollamos, mediante el uso de estadística en nuestras clases, donde Tauber (2020) muestra que la estadística tiene como objetivos: impulsar la reflexión y el pensamiento crítico. Así mismo, observamos que inducen a los alumnos a interpretar, comprender, indagar, investigar, generalizar entre otros según los niveles educativos.

- ### Áreas de la Estadística.

La metodología estadística se divide en dos áreas como:

1. **Estadística descriptiva:** esta área se imparte en los grados de la educación básica de nuestro sistema educativo. Se encarga de representar, analizar e interpretar las características de una población, mediante las presentaciones estadísticas.

2. **Estadística Inferencial o inductiva:** estima con base a la probabilidad de un evento, infiere hace predicciones y permite obtener conclusiones de una muestra o población estudiada. Esta área se imparte en los grados de la educación media y superior.

La estadística como herramienta para el análisis e interpretación.

Promover la mirada a la enseñanza y aprendizaje de la estadística, es muy relevante.

Está conectada a los procesos o diseños de investigación que nos arrojan los indicadores que permiten hacer análisis e interpretaciones utilizando recursos tecnológicos al alcance de los alumnos.

La enseñanza de la estadística en nuestras aulas ha tomado relevancia desde que se implementa la planificación por competencias en nuestro país; como ciencia interdisciplinar induce al desarrollo de las visualización y comprensión lectora de los alumnos, entre otros y sus actividades promueven la atención a la diversidad.

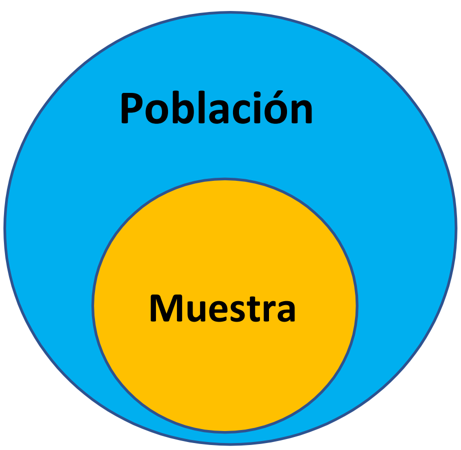
• Conceptos elementales de la estadística

Los indicadores que recabamos mediante los diferentes instrumentos de recolección de datos, nos sirven para medir a un país o a un sector, tanto en el comercio o en las investigaciones de mercados o los que aplicamos procesos de inteligencia comercial.

Los datos e indicadores que miden el producto de una empresa, de un mercado o un departamento nos permiten analizar desde diversos enfoques y según la necesidad podríamos medir las exportaciones o importaciones de una empresa y proponer mediante las estadísticas, estrategias de mercados. Por lo cual podemos realizar el análisis de un producto, análisis de un mercado, análisis de una empresa, en análisis de un sector económico, entre otros.

a) **Población estadística**: En estadística, el término "población" se refiere al conjunto de elementos que se quiere investigar, estos elementos pueden ser objetos, acontecimientos, situaciones o grupo de personas.

b) **Muestra**: En estadística, una muestra es un subconjunto de casos o individuos de una población. En diversas aplicaciones interesa que una muestra sea, representativa y para ello debe escogerse una técnica de muestra adecuada, que produzca una muestra aleatoria adecuada. También es un subconjunto de la población, y para ser representativa, debe tener las mismas características de la población.



Censo: estudio que se realiza a la población.

Muestreo: estudio que realiza a una parte de la población.

c) **Tipos de presentaciones estadísticas**: En los análisis estadísticos, es frecuente utilizar representaciones visuales complementarias de las tablas que resumen los datos de estudio. Con estas representaciones, adaptadas en cada caso a la finalidad informativa que se persigue, se transmiten los resultados de los análisis de forma rápida, directa y comprensible para un conjunto amplio de personas.

d) **Tipos de representaciones gráficas**: Cuando se muestran los datos estadísticos a través de representaciones gráficas, se ha de adaptar el contenido a la información visual que se pretende transmitir. Para ello, se barajan múltiples formas de representación:

- **Diagramas de barras**: muestran los valores de las frecuencias absolutas sobre un sistema de ejes cartesianos, cuando la variable es discreta o cualitativa.
- **Histogramas**: formas especiales de diagramas de barras para distribuciones cuantitativas continuas.
- **Polígonos de frecuencias**: formados por líneas poligonales abiertas sobre un sistema de ejes cartesianos.
- **Gráficos de sectores**: circulares o de tarta, dividen un círculo en porciones proporcionales según el valor de las frecuencias relativas.
- **Pictogramas**: o representaciones visuales figurativas. En realidad, son diagramas de barras en los que las barras se sustituyen con dibujos alusivos a la variable.
- **Cartogramas**: expresiones gráficas a modo de mapa.
- **Pirámides de población**: para clasificaciones de grupos de población por sexo y edad.

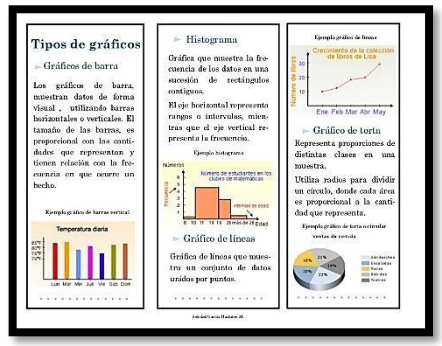
e) **Variables cualitativas**: Es aquel tipo de variable estadística que describe cualidades, características y/o circunstancias de algún objeto, persona o eventualidad, sin el uso de números, es decir expresa una categoría no numérica, por ejemplo, el sexo (femenino o masculino) de un individuo. También se les conoce como variables categóricas, y en palabras más simples son variables que no apalean un sentido natural de orden, se miden bajo una escala nominal.

- **Variable cualitativa ordinal o variable cuasi cuantitativa:** La variable puede tomar distintos valores ordenados siguiendo una escala establecida, aunque no es necesario que el intervalo entre mediciones sea uniforme, por ejemplo: leve, moderado, fuerte.
- **Variable cualitativa nominal**: En esta variable los valores no pueden ser sometidos a un criterio de orden, como por ejemplo los colores o el lugar de registro.

f) **Variable cuantitativa:** son las que tienen la capacidad de adoptar valores numéricos, cualquier tipo de cifra, brindando un mayor entendimiento a los resultados de las estadísticas, ya que dan un valor bastante exacto. Dentro de las variables cuantitativas se pueden encontrar a su vez diferentes tipos que se determinan dependiendo de la precisión del instrumento empleado para medirlo.

ACTIVIDAD N°12.

I. Cuestionario. Responda las siguientes preguntas en un tríptico creativo de estadística.



Instrucciones: Use hoja blanca o de color y con **letra legible** responda las preguntas. Recuerde confeccionar una portada y responda las preguntas de forma de forma ordenada y con mucha creatividad.

1. ¿Qué es la estadística?
2 ¿Cómo se aplica la estadística en el comercio? De un ejemplo.
3. Busque en youtube o mire este VIDEO DE ¿cómo representar los datos? y realice una síntesis de una página de:

a) ¿Qué instrumentos utilizamos para recoger datos?
b) ¿Cómo podemos representar los datos?
c) ¿Cuáles son las medidas de tendencia central?

II. Glosario. Defina e ilustre en su cuaderno los siguientes conceptos[1]. Busque en diferentes textos en línea.

a) Población estadística
b) Muestra
c) Tipos de presentaciones estadísticas
   - Diagramas de barras
   - Histogramas
   - Polígonos de frecuencias
   - Gráficos de sectores
   - Pictogramas
   - Cartogramas
   - Pirámides de población
d) Variables cualitativas
e) Variable cualitativa ordinal o variable cuasi cuantitativa
f) Variable cualitativa nominal
g) Variable cuantitativa.
h) Características de las variables cuantitativas
i) variables cuantitativa de categoría
j) variables cuantitativa discretas
k) variables cuantitativa continua

¡Felicidades! Culminamos todas las unidades de la guía de autoaprendizaje.

[1]http://www.azatrade.info/noticias/wp-content/uploads/2019/05/2_Estad%C3%ADsticaAplicada.pdf

AUTOEVALUACIÓN A-2

El siguiente cuestionario es para que se complete al culminar todos los temas, evalué y proponga nuevas metas en el aprendizaje. Las preguntas deben ser respondidas con la mayor claridad y agregarlas al final del portafolio que recoja todas las actividades propuestas en esta guía de aprendizaje.

1. De los temas abordados seleccione:

   a) Dos ejemplos, que le hayan ayudado a comprender los conceptos. Escríbalos

   ____
   ____
   ____
   ____
   ____

   b) Dos contenidos que le hayan resultado importante y ayudado a resolver las unidades 2,3 y 4. Explique brevemente.

   ____
   ____
   ____
   ____
   ____

   c) Dos preguntas, problemas o cuestiones que usted pudo responder con facilidad a lo largo de la unidad. Explique.

   ____
   ____
   ____
   ____
   ____

   d) Dos preguntas, problemas o cuestiones que aún le cuestan aprender.

   ____
   ____
   ____
   ____
   ____

   e) ¿En qué medida considera que las temáticas abordadas en la unidad le resultaron o resultan de aprovechamiento para el desarrollo de su formación académica?

   ____
   ____

f) ¿Cuáles fueron las clases, temas y/o propuestas que más le interesaron y/o gustaron? Explique brevemente.

g) ¿Considera que la bibliografía, plataforma Khan Academy, lugares recomendados le sirvió para profundizar los temas abordados? Explique brevemente.

h) Relate brevemente su proceso de aprendizaje durante el desarrollo de la guía de aprendizaje. Tenga en cuenta el grado de interés, temas que más le gustaron, temas que menos le interesaron, lectura, comprensión, dificultades, momentos de ruptura, de conexión, la realización de talleres, entre otros.

CURSOS GRATUITOS DE GEOGEBRA

Descarga curso inicial y avanzado en:
https://www.oei.es/Educacion/recursoseducativosoei/formaciondocente

BIBLIOGRAFÍA

Baldor, A. (1997). Aritmética, Ed. *Publicaciones Cultural, México*.

Diana de Lajón (2013) Matemática para el comercio 10. Editorial Sibauste S.A.

Arturo Aguilar, Fabián Bravo, Herman Gallegos, Miguel Cerón y Ricardo Reyes (2009). Matemáticas Simplificadas. Editorial Pearson.

Bolívar, A. (2018). Autoevaluación institucional para la mejora interna.

Valero-García, M., & de Cerio, L. M. D. (2005, September). Autoevaluación y co-evaluación: estrategias para facilitar la evaluación continuada. In *Actas del Simposio Nacional de Docencia en Informática (SINDI), Granada* (pp. 25-32).

Portal Educativo (s.f.). Razones y Proporciones. Recuperado el 27 de julio de 2020. Disponible en https://www.portaleducativo.net/septimo-basico/293/Razones-proporciones

INFOGRAFÍA

- http://recursostic.educacion.es/descartes/web/materiales_didacticos/EDAD_3eso_numeros_racionales/cuadernos/3eso_cuaderno_1_cas.pdf
- https://es.khanacademy.org/
- **https://verobolanos2009.files.wordpress.com/2014/06/autoevaluacion.pdf**
- http://matepotenciacionbasica.blogspot.com/2014/03/historia-de-la-potenciacion.html
- **https://www.educ.ar/recursos/151217/funciones-y-ecuaciones-exponenciales-y-logaritmicas?from=150926**
- **https://www.educ.ar/recursos/132100/potencias-de-10-ceros-atomos-y-el-tamano-de-todas-las-cosas?coleccion=132148**

REPÚBLICA DE PANAMÁ
GOBIERNO NACIONAL

MINISTERIO DE
EDUCACIÓN