Ministerio de Educación
Dirección Regional de Panamá Este
I.P. T. México- Panamá
Departamento de Matemática

Material de Aprendizaje a Distancia
11^{vo} Grado
Bachiller en Ciencias y Agropecuaria

11° E, F, G, H
Profesora: Shanthall González
Tel. 6522-1736
shanthall.gonzalezmexicopanama@gmail.com

11° D
Profesora: Diocelinda Sanjur
Tel. 6159-4581
diocelindasanjur@gmail.com

Tercer Trimestre
2022

Fechas de entrega:

Viernes 11 de noviembre → ***Actividad sumativa #1***
→ ***Actividad apreciación #1***
Viernes 2 de diciembre → ***Actividad sumativa #2***
→ ***Actividad sumativa #3***
Viernes 16 de diciembre → ***Actividad de apreciación #2***

Indicaciones Generales:

- Sea puntual, claro y ordenado en la entrega y solución de sus ejercicios.
- Entregue los talleres en las hojas correspondientes, no olvide colocar su nombre y grupo en los mismos. Debe desarrollar a mano los problemas para ser evaluado.
- Cada taller tiene puntos por puntualidad y orden y aseo. Son los puntos adicionales que se contabilizan en cada taller.

TEMA#1. MATRICES (Área Álgebra)

Las matrices se presentaron por primera vez en 1858 y resultaron ser una gran herramienta en muchas áreas tales como la física atómica, dinámica de fluidos y en los negocios.

La matriz es un arreglo rectangular de números reales, los números reales de una matriz se llaman elementos y se ordenan en filas o columnas.

Las matrices pueden ser de cualquier orden, el orden de una matriz se define por el número de filas multiplicado por el número de columnas, recibe también el nombre de dimensión o tamaño.

Las matrices se denotan por letras mayúsculas y sus elementos por letras minúsculas.

La diagonal principal de una matriz cuadrada contiene los elementos de la línea oblicua de esquina a esquina que empieza en la superior izquierda. Este elemento solo lo podemos identificar en las matrices cuadradas.

Ejemplo:

La forma de representar una matriz $m \times n$ es la siguiente y a la cual se le llama matriz de orden $m \times n$.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}_{m\times n}$$

Filas

Columnas

Orden de la matriz

El elemento a_{11} se ubica en la fila 1 columna 1, el elemento a_{12} se ubica en la fila 1 columna 2, el elemento a_{21} se ubica en la fila 2 columna 1 y el elemento a_{22} se ubica en la fila 2 columna 2, de esta manera se nombran los elementos de la matriz para encontrar su posición.

El primer número indica fila y el segundo la columna

$$B = \begin{bmatrix} 8 & 5 & -12 & 1 \\ 3 & -4 & 9 & 2 \\ -2 & 3 & 1 & 9 \\ 6 & 7 & -2 & 0 \end{bmatrix}_{4\times 4}$$

Diagonal Principal

Complete los espacios con de los elementos correspondientes de la matriz anterior.

$$b_{11} = \_\_\_ \; b_{12} = \_\_\_ \; b_{13} = \_\_\_ \; b_{14} = \_\_\_ \quad b_{22} = \_\_\_ \; b_{24} = \_\_\_ \; b_{32} = \_\_\_ \; b_{43} = \_\_\_$$

Diagonal Principal: (___, ___, ___, ___)

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 4 & 7 \\ 8 & -1 & 4 \\ 0 & 7 & 5 \end{bmatrix}_{3\times 3}$$

Complete los espacios con de los elementos correspondientes de la matriz anterior.

$$a_{12} = \_\_\_ \; a_{22} = \_\_\_ \; a_{33} = \_\_\_ \; a_{13} = \_\_\_ \quad a_{23} = \_\_\_ \quad a_{32} = \_\_\_ \; a_{21} = \_\_\_$$

Diagonal Principal: (___, ___, ___, ___)

TIPOS DE MATRICES

A continuación, se mostrarán los diferentes tipos de matrices con su ejemplo.

1. Matriz fila: está constituida por una sola fila. $D = [3 \quad 6 \ -8\,]_{1\times 3}$

2. Matriz columna: tiene una sola columna. $E = \begin{bmatrix} -5 \\ -3 \\ 8 \end{bmatrix}_{3\times 1}$

3. Matriz rectangular: tiene distinto número de filas que de columnas. $F = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ 1 & 8 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}_{3\times 2}$

4. Matriz cuadrada: tiene igual número de filas que de columnas. $G = \begin{bmatrix} 3 & 8 & 5 \\ -2 & 4 & 6 \\ 1 & 0 & 9 \end{bmatrix}_{3\times 3}$

5. Matriz nula: todos sus elementos son cero y puede ser de cualquier tamaño.

$$N = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{2\times 3}$$

6. Matriz traspuesta: se obtiene cambiando ordenadamente las filas por las columnas. Se denotan con la misma letra de la matriz original A y el índice "t" que indicara es traspuesta de A. Como se ve en el ejemplo.

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 4 & 7 & 2 \\ 8 & -1 & 4 & 5 \\ 0 & 7 & 5 & 3 \end{bmatrix}_{3\times 4} \quad A^t = \begin{bmatrix} -3 & 8 & 0 \\ 4 & -1 & 7 \\ 7 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 3 \end{bmatrix}_{4\times 3}$$

7. Matriz triangular superior: los elementos situados por debajo de la diagonal principal son ceros. $R = \begin{bmatrix} 3 & -12 & -8 \\ 0 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}_{3\times 3}$

8. Matriz triangular inferior: los elementos situados por encima de la diagonal principal son ceros. $Q = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 5 & -1 & 0 \\ 4 & 2 & -2 \end{bmatrix}_{3\times 3}$

9. Matriz diagonal: todos los elementos que no están situados en la diagonal principal son ceros. $S = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}_{3\times 3}$

10. Matriz escalar: es una matriz diagonal cuyos elementos de la diagonal principal son iguales. $I = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}_{3\times 3}$

11. Matriz unidad o identidad: es una matriz diagonal en la que los elementos de la diagonal principal son todos uno. $U = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{3\times 3}$

12. Matrices iguales: son del mismo tamaño y sus componentes correspondientes (elementos) son iguales.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}_{3\times 3} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}_{3\times 3} \Rightarrow A = B \rightarrow$$

Entonces A es igual a B

13. Matriz simétrica: es una matriz cuya traspuesta es exactamente igual a la matriz original, es decir $a_{ij} = a_{ji}$.

$$C = \begin{bmatrix} 5 & 7 & 2 \\ 7 & -1 & 3 \\ 2 & 3 & 8 \end{bmatrix}_{3\times 3} \quad C^t = \begin{bmatrix} 5 & 7 & 2 \\ 7 & -1 & 3 \\ 2 & 3 & 8 \end{bmatrix}_{3\times 3} \Rightarrow C = C^t$$

Práctica Formativa

1- $\begin{bmatrix} 2 & -5 & -7 \\ 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & -7 \end{bmatrix}$ 2- $\begin{bmatrix} 2 & 5 & -3 \\ 3 & -6 & 2 \\ 4 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ 3- $\begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 2 & -5 & 0 \\ 6 & 1 & 4 \end{bmatrix}$ 4- $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

________________ ________________ ________________ ________________

5- $\begin{bmatrix} -2 & 3 & 5 & 8 & 9 \end{bmatrix}$ 6- $\begin{bmatrix} 9 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ ________________

____

II. Determine el orden de cada una de las siguientes matrices.

1. $C = \begin{pmatrix} 0 & 8 & 3 & -1 \\ -8 & 0 & 4 & -5 \\ -3 & -4 & 0 & 7 \\ 1 & 5 & -7 & 0 \end{pmatrix}$ **2.** $A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix};$ **3.** $B = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 5 \\ 3 & 2 & 6 \\ 2 & 3 & 7 \\ 1 & 4 & 9 \end{pmatrix}$

III. Para las siguientes matrices determine su traspuesta y el orden de cada una y la traspuesta correspondiente:

$E = \begin{bmatrix} 6 & 2 & -4 \\ 3 & -1 & 2 \\ 0 & 4 & 3 \end{bmatrix}_{\_\_\times\_\_}$ $F = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 3 & 2 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}_{\_\_\times\_\_}$ $G = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}_{\_\_\times\_\_}$

V. Determine cuáles de las siguientes matrices son iguales, utilice la notación empleada en la definición

A= $\begin{bmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 3 & -5 & 7 \end{bmatrix}$ **B=** $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -7 \\ \frac{5}{3} & -2 & 5 \\ -3 & 8 & 2 \end{bmatrix}$ **D=** $\begin{bmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 3 & -5 & 7 \end{bmatrix}$ **E =** $\begin{bmatrix} 3 & -5 & 7 \\ 2 & 4 & -1 \end{bmatrix}$ **F =** $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -7 \\ \frac{5}{3} & -2 & 5 \\ -3 & 8 & 2 \end{bmatrix}$

VI. Determine cuáles de las siguientes matrices son simétricas. Realice el procedimiento para verificar si son simétrica

$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 9 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$

TEMA#2. OPERACIONES CON MATRICES

La suma de matrices fue definida en 1858 por el matemático inglés Arthur Cayley.

1. **Adición y sustracción de matrices:** la suma o resta de dos matrices $[A]$ y $[B]$ dará como resultado una matriz C con el mismo orden de las matrices que se suman o restan, antes de sumar o restar matrices se debe verificar que ambas sean del mismo orden, para luego sumar o restar los términos que estén en la misma posición, respetando la ley de los signos (el signo del mayor será el del resultado).
Los elementos de la matriz $[C]$ resultante se calculan de la siguiente manera:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & -1 & -4 \end{bmatrix}_{3\times4} \quad B = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}_{3\times4}$$

$$[A]_{3\times4} + [B]_{3\times4=}[C]_{3\times4}$$
$$[A]_{3\times4} - [B]_{3\times4=}[D]_{3\times4}$$

Ejemplo de suma de matrices:

$$C = \begin{bmatrix} 1+(-2) & 2+0 & -1+1 & 1+2 \\ 2+3 & 3+2 & 0+0 & 2+(-1) \\ 2+1 & 2+(-1) & -1+1 & -4+0 \end{bmatrix}_{3\times4}$$
$$C = \begin{bmatrix} 1-2 & 2+0 & -1+1 & 1+2 \\ 2+3 & 3+2 & 0+0 & 2-1 \\ 2+1 & 2-1 & -1+1 & -4+0 \end{bmatrix}_{3\times4}$$
$$C = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 & 3 \\ 5 & 5 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & -4 \end{bmatrix}_{3\times4}$$

Ejemplo de resta de matrices:

$$D = \begin{bmatrix} 1-(-2) & 2-0 & -1-1 & 1-2 \\ 2-3 & 3-2 & 0-0 & 2-(-1) \\ 2-1 & 2-(-1) & -1-1 & -4-0 \end{bmatrix}_{3\times4}$$
$$D = \begin{bmatrix} 1+2 & 2-0 & -1-1 & 1-2 \\ 2-3 & 3-2 & 0-0 & 2+1 \\ 2-1 & 2+1 & -1-1 & -4-0 \end{bmatrix}_{3\times4}$$
$$D = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 3 & -2 & -4 \end{bmatrix}_{3\times4}$$

- ✓ Si $\boldsymbol{A}$ es una matriz y $\boldsymbol{O}$ la matriz nula de igual orden, entonces $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{O}=\boldsymbol{O}+\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}$
- ✓ Toda matriz $\boldsymbol{A}$ tiene su opuesta o inversa aditiva que cumple con: $\boldsymbol{A}+(-\boldsymbol{A})=\boldsymbol{0}$

Algunas propiedades importantes, si $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ y $\boldsymbol{C}$ son matrices, entonces:

$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}$ (Propiedad conmutativa de la suma)

$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})+\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}+(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})$ (Propiedad asociativa de la suma)

$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}\neq\boldsymbol{B}-\boldsymbol{A}$ (Propiedad no conmutativa de la resta)

Práctica Formativa
(Suma y resta de matrices)

I. Resuelva las siguientes operaciones con matrices.

1. $\begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -4 & 1 \\ -8 & 6 \end{bmatrix} =$
2. $\begin{bmatrix} 2 & 6 & -2 \\ 1 & -1 & 3 \\ -5 & -7 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -7 & -6 & 5 \\ 4 & -8 & -3 \\ 0 & 2 & -3 \end{bmatrix} =$
3. $\begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -5 & 6 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -5 & -1 \\ 3 & -6 \\ -2 & -2 \end{bmatrix} =$

II. Determine el valor de x y de y en cada igualdad.

1. $\begin{bmatrix} x & 13 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2 & -11 & 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 8 & y & 4 \\ 2 & -2 & 2 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 & 18 & -4 \\ -3 & 4 & -1 \\ 1 & -11 & 0 \end{bmatrix}$ $x =$ _____ $y =$ _____

III. Dadas las siguientes matrices, calcule $B - C + A$

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 5 & 2 \\ 4 & 1 & 8 \\ 6 & -1 & 2 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 4 \\ 4 & 1 & 3 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 3 \\ 4 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

TEMA#3. OPERACIONES CON MATRICES

1. Multiplicación de una matriz por un escalar: se resuelve multiplicando el escalar por cada uno de los elementos de la matriz. La matriz resultante mantiene el orden de la matriz original.

Ejemplo#1:

$$r = -3 \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 3 & -2 & 2 \\ 5 & -1 & 0 \end{bmatrix}_{3\times 3}$$

$$rC = \begin{bmatrix} (-3)1 & (-3)4 & (-3)3 \\ (-3)3 & (-3)-2 & (-3)2 \\ (-3)5 & (-3)-1 & (-3)0 \end{bmatrix}_{3\times 3}$$

$$rC = \begin{bmatrix} -3 & -12 & -9 \\ -9 & 6 & -6 \\ -15 & 3 & 0 \end{bmatrix}_{3\times 3}$$

Ejemplo#2:

$$r = \frac{1}{2} \qquad B = \begin{bmatrix} 10 & 8 & -2 \\ -6 & 2 & 22 \\ 40 & -16 & -50 \end{bmatrix}_{3\times 3}$$

$$rB = \begin{bmatrix} \left(\frac{1}{2}\right)10 & \left(\frac{1}{2}\right)8 & \left(\frac{1}{2}\right)-2 \\ \left(\frac{1}{2}\right)-6 & \left(\frac{1}{2}\right)2 & \left(\frac{1}{2}\right)22 \\ \left(\frac{1}{2}\right)40 & \left(\frac{1}{2}\right)-16 & \left(\frac{1}{2}\right)-50 \end{bmatrix}_{3\times 3}$$

$$rB = \begin{bmatrix} 5 & 4 & -1 \\ -3 & 1 & 11 \\ 20 & -8 & -25 \end{bmatrix}_{3\times 3}$$

2. Producto escalar: se llama producto escalar al resultado de multiplicar 2 vectores (fila x columna), este resultado es un solo elemento y se obtiene multiplicando elemento por elemento y sumando los resultados. Las filas y columnas deben tener la misma cantidad de elementos.

Ejemplo #1: $[5 \quad 9 \quad -2] \cdot \begin{bmatrix} 11 \\ 10 \\ -1 \end{bmatrix} = [(5)(9) + (9)(10) + (-2)(-1)] = [45 + 90 + 2] = [137]$

Ejemplo #2:

$$\begin{bmatrix} 3 \\ -4 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot [-8 \quad -3 \quad 0 \quad 1] = [(3)(-8) + (-4)(-3) + (-1)(0) + (0)(1)]$$

$$= [-24 + 12 + 0 + 0]$$

$$= [-12]$$

El producto de una fila por una columna da como resultado un solo elemento.

3. <u>Multiplicación de matrices</u>: se debe verificar si las matrices son conformables para la multiplicación, es decir, si queremos calcular AB, el número de columnas de A debe ser igual al número de filas de B. Luego cada elemento de las filas de la matriz A se deben multiplicar por su correspondiente en las columnas de la matriz B, para luego sumarse y obtener cada elemento de la matriz producto AB, es decir el producto de cada fila por cada columna genera un solo elemento de la matriz resultante (productor escalar). El orden de la matriz AB será el producto del número de las filas de la matriz A por el número de las columnas de la matriz B.

Ejemplo#1:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & -3 & -2 \\ 0 & -4 & 5 & 2 \end{bmatrix}_{3\times 4} \qquad B = \begin{bmatrix} -2 & 6 \\ 0 & 1 \\ -1 & 3 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}_{4\times 2}$$

$A_{3\times 4} \cdot B_{4\times 2}$ son conformables para la multiplicación ya que si cumplen la condición.

$$AB = \begin{bmatrix} (1)(-2)+(-1)(0)+(0)(-1)+(3)(2) & (1)(6)+(-1)(1)+(0)(3)+(3)(-3) \\ (2)(-2)+(0)(0)+(-3)(-1)+(-2)(2) & (2)(6)+(0)(1)+(-3)(3)+(-2)(-3) \\ (0)(-2)+(-4)(0)+(5)(-1)+(2)(2) & (0)(6)+(-4)(1)+(5)(3)+(2)(-3) \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} -2+0+0+6 & 6+(-1)+0+(-9) \\ -4+0+3+(-4) & 12+0+(-9)+6 \\ 0+0+(-5)+4 & 0+(-4)+15+(-6) \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} -2+6 & 6-10 \\ -8+3 & 18-9 \\ -5+4 & 15-10 \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 4 & -4 \\ -5 & 9 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}_{3\times 2}$$

Ejemplo#2:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & -2 \end{bmatrix}_{2\times 3} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}_{3\times 2}$$

Como el orden de A es 2×3 y el orden de B es 3×2, entonces sabemos que el producto de ellas, AB será una matriz de orden 2×2.

Podemos decir que el resultado de $AB = C$, con $C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix}$

Calculamos los valores de las entradas de C.

$c_{11} = a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31} = 0 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 2 \cdot 0 = 1$
$c_{12} = a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + a_{13}b_{32} = 0 \cdot (-2) + 1 \cdot 0 + 2 \cdot (-1) = -2$
$c_{21} = a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + a_{23}b_{31} = (-1) \cdot 1 + 2 \cdot 1 + (-2) \cdot 1 = 1$
$c_{22} = a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + a_{23}b_{32} = (-1) \cdot (-2) + 2 \cdot 0 + (-2) \cdot (-1) = 4$

Conociendo los valores de los elementos de C, entonces escribimos el resultado de la multiplicación. $C = A \cdot B = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$

*** Ambas formas son válidas para desarrollar el producto de matrices ***

Práctica Formativa (Multiplicación de matrices.)

Determine los siguientes productos de matriz por escalar.

1) $-5\begin{bmatrix}-7 & 0\\ -4 & 6\end{bmatrix}$ **2)** $-3\begin{bmatrix}6 & -4\\ 2 & 1\\ 5 & 0\end{bmatrix}$ **3)** $\frac{2}{3}\begin{bmatrix}3 & 2 & -3 & 1\\ 0 & 4 & 1 & 0\\ -4 & 5 & -2 & -1\end{bmatrix}$

Determine los siguientes productos de matrices.

1) $\begin{bmatrix}4 & -5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4\\ -2\end{bmatrix}$ **2)** $\begin{bmatrix}-8\\ 5\\ -9\\ -9\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1 & 3 & 5 & 3\end{bmatrix}$ **3)** $\begin{bmatrix}4 & -5\\ 7 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5 & -1\\ -2 & 7\end{bmatrix}$

4) $\begin{bmatrix}1 & 8 & 0 & 3\\ 5 & 2 & -3 & 6\\ 4 & -1 & -2 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 3\\ 1 & 8\\ 0 & 0\\ 4 & 6\end{bmatrix}$ **5)** $\begin{bmatrix}13 & 8\\ 4 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}6 & -4 & 2 & 31\\ 1 & 9 & -1 & 18\end{bmatrix}$

TEMA#4. REPRESENTACIÓN MATRICIAL DE SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES.

Una de las aplicaciones inmediatas de las matrices es la representación de sistemas de ecuaciones lineales, para poder obtener las soluciones de dicho sistema a partir de operaciones realizadas entre las filas de la matriz aumentada.

Considere un sistema de m ecuaciones lineales con n incógnitas.

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1\\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2\\ \vdots \qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \quad &\quad \vdots\\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

Se puede representar como: $\boldsymbol{A \cdot X = B}$; para ello se deben escribir tres matrices.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots\\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn}\end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_n\end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix}b_1\\ b_2\\ \vdots\\ b_m\end{bmatrix}$$

En donde:

A= matriz de coeficientes.

X= matriz columna de las variables.

B= matriz columna de los valores que se encuentran en el segundo miembro del sistema de ecuaciones lineales.

Luego puede indicarse en forma matricial de la siguiente forma: **A** **X** = **B**

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots\\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_n\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}b_1\\ b_2\\ \vdots\\ b_m\end{bmatrix}$$

A la matriz siguiente $\left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2\\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots\\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m\end{array}\right]$

Se le llama matriz aumentada.

Ejemplo #1: Considere el siguiente sistema de ecuaciones lineales, $\begin{cases} -2x_1 + 3x_2 - x_3 = 1 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 4 \\ -2x_1 - x_2 + x_3 = -3 \end{cases}$

$$\begin{bmatrix} -2 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -2 & -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ -3 \end{bmatrix}$$

Forma Matricial

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -2 & 3 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 4 \\ -2 & -1 & 1 & -3 \end{array}\right]$$

Matriz aumentada

Ejemplo#2: Considere el siguiente sistema de ecuaciones lineales, $\begin{cases} x + 2y + z = 0 \\ y - 3z = 0 \\ -x + y - z = 0 \end{cases}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Forma Matricial

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right]$$

Matriz aumentada

Práctica Formativa (Representación matricial de sistemas de ecuaciones)

☆ Exprese en la forma matricial y matriz aumentada.

☆ $\begin{cases} 17x_1 - 21x_2 = 3 \\ 53x_1 + 12x_3 = 7 \\ x_1 + 9x_2 - x_3 = 2 \end{cases}$

☆ $\begin{cases} 8x + 11y - 5z = 0 \\ 21x - 35y + 6z = 3 \\ 19x - 12y + 4z = 6 \\ 15x + y - z = 9 \end{cases}$

☆ $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 5 \\ 3x_1 + 2x_2 - 6x_3 = -4 \\ 5x_1 + 6x_2 + x_3 = 10 \end{cases}$

☆ Exprese cada ecuación matricial como un sistema de ecuaciones lineales.

↪ $\begin{bmatrix} 4 & -2 & 8 \\ 3 & 7 & 12 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}$

↪ $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 5 & 0 & 4 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 8 \\ 3 \end{bmatrix}$

↪ $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}$

☆ Encuentre el sistema de ecuaciones lineales correspondientes a cada una de las matrices aumentadas, usted determina las variables.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & -4 & 1 & 7 \\ 2 & 0 & 3 & -5 \\ 1 & -1 & 6 & 0 \end{array}\right] \qquad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & -4 & 9 \\ 1 & -1 & 2 & 2 \end{array}\right] \qquad \left[\begin{array}{ccc|c} 6 & 2 & 5 & 73 \\ 7 & -3 & 1 & -1 \\ 4 & 8 & 9 & -9 \end{array}\right]$$

Actividad Sumativa #1

(Matrices)

Nombre:________________________ **Grupo:**___________

Valor: ___/75pts

Resuelva con orden cada una de las partes aplicando la teoría y los ejemplos presentados en el tema.

I. Identifique las siguientes matrices por su nombre. (5 puntos)

1- $\begin{bmatrix} 1 & 7 & 2 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}$ 2- $\begin{bmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ 3- $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

__________________ __________________ __________________

4- $\begin{bmatrix} -2 \\ 5 \\ 6 \\ 1 \end{bmatrix}$ 5- $\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ \frac{2}{5} & -1 & 0 \\ -2 & 5 & -7 \end{bmatrix}$

__________________ __________________

II. Determine el orden de cada una de las siguientes matrices. (7 puntos)

$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 7 & 0 \\ 4 & 5 & -1 & 8 \end{bmatrix}$ ___×___ $B = \begin{bmatrix} -3 & 5 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$ ___×___ $C = \begin{bmatrix} 6 & 7 & 9 \\ 2 & 8 & 4 \end{bmatrix}$ ___×___

$G = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & -3 & -2 \\ 0 & -4 & 5 & 2 \end{bmatrix}$ ___×___ $H = \begin{bmatrix} -6 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}$ __×__ $I = \begin{bmatrix} 0 & -6 \\ -2 & 3 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$ ___×___

$J = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \end{bmatrix}$ ____ × ____

III. En la matriz dada, determine el orden de la matriz, identifique los elementos que se piden y los elementos que forman la diagonal principal. 16pts

$A = \begin{bmatrix} 5 & -1 & -3 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & -6 & -2 & 3 \\ 4 & -1 & 7 & 2 \end{bmatrix}$

a_{44} = ______ a_{45} = ______
a_{23} = ______ a_{32} = ______
a_{14} = ______ a_{51} = ______
a_{43} = ______ a_{34} = ______
a_{12} = ______ a_{33} = ______

Orden: _____x______

Elementos de la diagonal principal: (_____, _____, _____, ______)

IV. Dadas las siguientes matrices, encuentre sus traspuestas e indique el orden de cada matriz y su traspuesta. (20 puntos)

$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 & 3 \\ 3 & 1 & 4 & 6 \\ -5 & 7 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ ___×___ $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 2 & 2 & -1 \end{bmatrix}$ ___×___ $C = \begin{bmatrix} 5 & -1 & 0 & 4 \\ -1 & 2 & -6 & -1 \\ 0 & -6 & -2 & 7 \\ 4 & -1 & 7 & 2 \end{bmatrix}$ ___×___

$D = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 3 \\ 0 & 5 & -2 \end{bmatrix}$ ___×___ $H = [\ 2 \ -1 \ \ 3\ ]$ ___×___

V. Determine cuáles de las siguientes matrices son iguales, utilice la notación empleada en la definición. (6 puntos)

$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 0 & -2 & 4 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}$ $C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \\ 4 & 7 \end{bmatrix}$ $D = \begin{bmatrix} 5 & 8 \\ 6 & 7 \end{bmatrix}$

$E = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}$ $F = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \\ 4 & 7 \end{bmatrix}$ $G = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 0 & -2 & 4 \end{bmatrix}$ $H = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -2 \\ 7 & 4 \end{bmatrix}$

VI. Determine cuáles de las siguientes matrices son simétricas. Realice el procedimiento para verificar si son simétrica. (16 puntos)

$A = \begin{bmatrix} 5 & 6 & 8 \\ 6 & 0 & 4 \\ 8 & 4 & 9 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ 5 & -2 \end{bmatrix}$ $C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 4 \\ 2 & 5 & 1 \end{bmatrix}$ $D = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$

Actividad Apreciación #1
(Operaciones con matrices)

Nombre:________________________ **Grupo:**__________
Valor: ___/**105pts**

Sea ordenado, debe incluir el procedimiento completo antes de presentar la respuesta.

Resuelva las siguientes operaciones con matrices.

1. $\begin{bmatrix} 4 & -3 & -9 & 5 \\ 3 & 1 & 10 & 3 \\ -2 & -8 & -18 & -8 \\ 0 & 5 & 7 & 9 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -8 & 9 & -5 & -1 \\ 5 & 12 & 7 & 3 \\ -9 & 8 & 13 & 5 \\ -9 & 7 & 7 & 3 \end{bmatrix}$ 32pts

2. $\begin{bmatrix} 3 & 8 & 9 \\ 4 & 10 & -6 \\ 2 & 12 & -9 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 8 & 7 & 4 \\ -12 & 14 & 15 \\ -9 & -20 & 24 \end{bmatrix}$ 18pts

Determine el valor de x y de y en cada igualdad.

1. $\begin{bmatrix} x & 5 \\ -2 & -2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 3 & y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & 3 \\ -5 & 3 \end{bmatrix}$ $x =$ _____ $y =$ _____ 8pts

2. $\begin{bmatrix} y & 1 \\ 5 & 2 \\ -3 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ x & 1 \\ 4 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 8 & 3 \\ 11 & 12 \end{bmatrix}$ $x =$ _____ $y =$ _____ 8pts

Dadas las siguientes matrices, calcule $A + C - B$

$A = \begin{bmatrix} -1 & 5 & 2 \\ 4 & 1 & 8 \\ 6 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 4 \\ 4 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ $C = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 3 \\ 4 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ 36pts

Actividad Sumativa #2
(Operaciones con matrices)

Nombre:________________________ **Grupo:**___________
Valor: ___/70pts

Sea ordenado, debe incluir el procedimiento completo antes de presentar la respuesta.

Resuelva las siguientes operaciones con matrices.

1. $\frac{2}{3}\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 5 \\ -6 & 1 \end{bmatrix}$ 10pts

2. $-3\begin{bmatrix} -8 & 9 & -5 & -1 \\ 5 & 12 & 7 & 3 \\ -9 & 8 & 13 & 5 \\ -9 & 7 & 7 & 3 \end{bmatrix}$ 17pts

3. $\begin{bmatrix} 13 & 8 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 6 & -4 & 2 & 31 \\ 1 & 9 & -1 & 18 \end{bmatrix}$ 20pts

4. $\begin{bmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 6 & -3 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & -1 & 5 \\ 1 & 0 & 0 \\ 4 & 9 & 2 \end{bmatrix}$ 20pts

Actividad Sumativa #3
(Representación matricial de sistema de ecuaciones lineales)

Nombre:______________________________ **Grupo:**___________
Valor: ___/75pts

Sea ordenado, debe incluir el procedimiento completo antes de presentar la respuesta. Resuelva los siguientes casos

- Exprese el sistema de ecuaciones en su forma matricial y la matriz aumentada.16pts

☆ $\begin{cases} 2w + 8x + 6y - 9z = 20 \\ 4w + 5x - 2y - z = -2 \\ -6w + 4x + 10y + 7z = 24 \end{cases}$ ☆ $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 9 \\ 2x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 1 \\ 3x_1 + 6x_2 - 5x_3 = 0 \end{cases}$

- Exprese como un sistema de ecuaciones lineales. 30pts

* $\begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 & 0 & -3 \\ -1 & 0 & -6 & 4 & 8 \\ 5 & 1 & 0 & 4 & 9 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 8 \\ 2 \end{bmatrix}$ * $\begin{bmatrix} 11 & 21 \\ 13 & 15 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 8 \end{bmatrix}$ * $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}$

- Encuentre el sistema de ecuaciones lineales correspondiente a la matriz aumentada. 24pts

$\left[\begin{array}{cccc|c} -5 & 3 & 7 & 9 & 15 \\ 2 & 4 & 3 & 18 & 7 \\ 8 & 5 & 12 & 6 & 21 \end{array}\right]$ $\left[\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & 9 & 144 \\ 2 & 8 & 7 & 204 \\ 5 & 6 & 3 & 168 \end{array}\right]$ $\left[\begin{array}{ccc|c} 6 & 2 & 5 & 73 \\ 7 & -3 & 1 & -1 \\ 4 & 8 & 9 & -9 \end{array}\right]$

Actividad Apreciación #2
(Matrices)

Nombre:________________________ **Grupo:___________**
Valor: ___/40pts

I- Parte. Verdadero y Falso. Escriba la palabra **Verdadero** para el enunciado cierto y la palabra **Falso** para aquellos que no sean ciertos. 7 puntos

1) Una matriz es un arreglo rectangular de números ……………………….________________.
2) Las matrices se presentaron por primera vez en 1858…………………..________________.
3) La única aplicación que tienen las matrices es en el desarrollo matemático ……………………………………………………………………………………….________________.
4) A los números reales que conforman las matrices se les llama elementos………………………………………………………………………….________________.
5) El conjunto horizontal de elementos recibe el nombre de renglón………________________.
6) Al arreglo vertical de elementos se le llama fila……………………………________________.
7) El orden de una matriz con **m** renglones y **n** columnas es **n** x **m**…………________________.

II- Parte. Pareo. Relacione el enunciado de la columna de la izquierda con la definición en la columna de la derecha. 16 puntos

1) Matriz cuadrada	_______	Todos los elementos sobre la diagonal principal son ceros
2) Matriz renglón	_______	Aquella cuya traspuesta es exactamente igual a la original
3) Matriz identidad	_______	Todos los elementos bajo la diagonal principal son ceros
4) Matriz diagonal	_______	Se obtiene intercambiando de forma ordenada las filas por columnas.
5) Matriz simétrica	_______	Los elementos de la diagonal principal son iguales a 1
6) Matriz triangular superior	_______	Aquella donde el número de renglones es igual al número de columnas.
7) Matriz triangular inferior	_______	Está formada por una sola fila
8) Matriz traspuesta	_______	Los elementos fuera de la diagonal principal son 0.

III- Aplicación. Encuentre las respuestas solicitadas, en el siguiente planteamiento.
En la tabla de abajo se muestra la cantidad de citas que se dan en una clínica, según la especialidad y el día de semana: (14 puntos)

1) ¿Cuál matriz representara la cantidad de citas por especialidad y día que se dan en la clínica durante un mes de 4 semanas?
2) ¿Cuántas citas de pediatría se dan en 4 semanas?
3) ¿Cuántas citas de ortopedia se darán para miércoles en el mes?
4) ¿Cuántas citas de optometría se dan por semana?
5) ¿Cuántas citas de odontología se dan para jueves y viernes al mes?

Especialidad	L	M	M	J	V
Odontología	0	6	6	12	12
Pediatría	9	0	9	9	9
Ortopedia	5	10	0	5	10
Ginecología	8	8	8	0	6
Optometría	14	14	7	7	0